Insiemi: Rappresentazione

Elencazione

Per rappresentare un insieme per elencazione si indicheranno i suoi elementi tra parentesi graffe.

Esempio

$$A = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$$

Caratteristica

Un insieme è rappresentato per caratteristica quando si descrivono le caratteristiche degli elementi che vi appartengono.

Esempio

Per indicare l'insieme dei numeri $A = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ per caratteristica

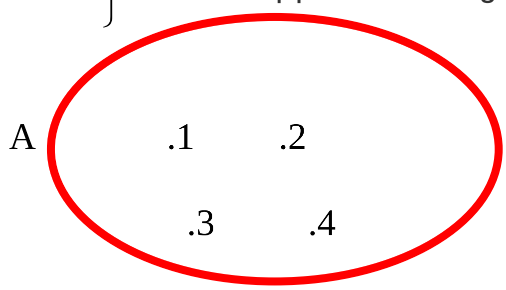
si scriverà: $A = \{x / x \in N, \ 1 \leq x \leq 4\}$

Grafica

Per rappresentare un insieme graficamente si usano delle linee chiuse (diagrammi di Eulero Venn) dove all'interno si indicano gli elementi.

Esempio

L'insieme $A = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ sarà rappresentato graficamente:



Operazioni tra insiemi: Unione $\cup$

Definizione: L'unione tra due insiemi è un insieme formato dagli elementi che appartengono al primo **o** al secondo insieme.

L'unione è quindi formata dagli elementi che appartengono al primo o al secondo insieme presi una sola volta.

Esempio

$$A = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\} \qquad B = \{2, \ 3, \ 4, \ 5\}$$

$$A \cup B = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5\}$$

Operazioni tra insiemi: Intersezione $\cap$

Definizione: L'intersezione tra due insiemi è un insieme formato dagli elementi che appartengono al primo **e** al secondo insieme.

L'intersezione è quindi formata dagli elementi che appartengono contemporaneamente al primo e al secondo insieme cioè dagli elementi comuni agli insiemi dati.

Esempio

$$A = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\} \qquad B = \{2, \ 3, \ 4, \ 5\}$$

$$A \cap B = \{2, \ 3, \ 4\}$$

Operazioni tra insiemi: Differenza

Definizione: La differenza tra due insiemi è un insieme formato dagli elementi del primo insieme esclusi quelli che appartengono al secondo insieme.

Esempio

$$A = \{1, \; 2, \; 3, \; 4\} \qquad B = \{2, \; 3, \; 4, \; 5\}$$

$$A - B = \{\; 1 \;\} \qquad B - A = \{\; 5 \;\}$$

Insieme complementare

Definizione: L'insieme complementare di un insieme rispetto ad un altro che lo contiene è l'insieme differenza tra i due:

Esempio

L'insieme complementare dei numeri pari P rispetto all'insieme dei numeri naturali N è l'insieme dei numeri dispari D e viceversa.

$$\overline{P} = D \qquad \overline{D} = P$$

Esempio

$$A = \{1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5\} \qquad B = \{3, \; 4, \; 5\}$$

L'insieme complementare di B rispetto ad A ($B \subset A$) si indica con $\overline{B}_A$ e coincide con $A - B = \{1, \; 2\}$

$$\overline{B}_A = \{1, \; 2\}$$

Insiemi: Prodotto Cartesiano

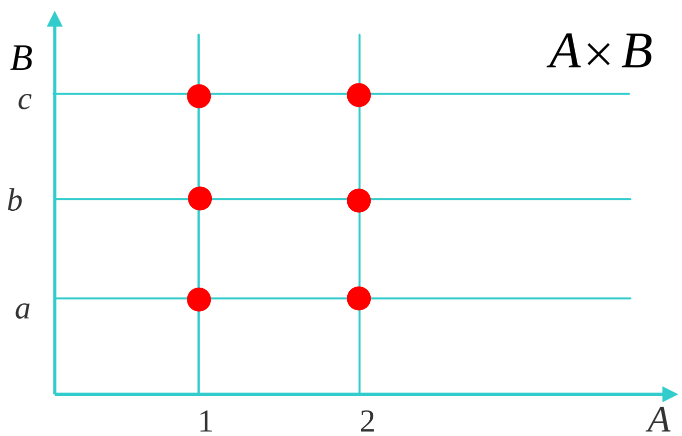
Definizione: Il prodotto Cartesiano tra due insiemi è un insieme i cui elementi sono coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene al primo insieme e il secondo elemento all'altro insieme.

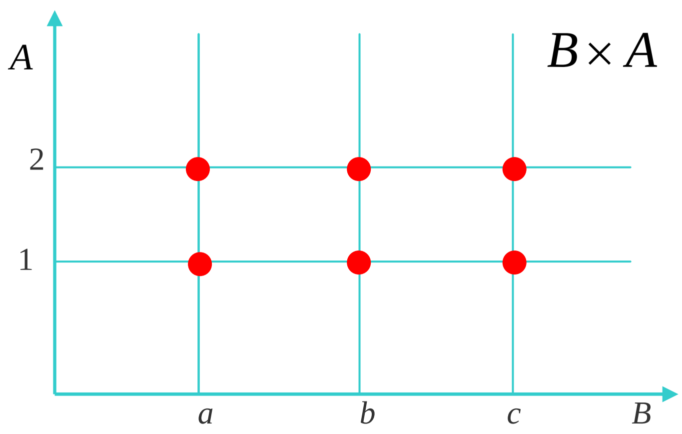
Esempio

$$A=\left\{1,\ \ 2\right\},\qquad B=\left\{a,\ \ b,\ \ c\right\}$$

$$A\times B=\left\{(1,a),\ \ (1,b),\ \ (1,c),\ \ (2,a),\ \ (2,b),\ \ (2,c)\right\}$$

$$B\times A=\left\{(a,1),\ \ (a,2),\ \ (b,1),\ \ (b,2),\ \ (c,1),\ \ (c,2)\right\}$$





Insieme delle Parti

Definizione: L'insieme delle parti di un insieme, è un insieme formato da tutti i possibili sottoinsiemi dell'insieme dato.

Dato un insieme formato da n elementi, il numero di tutti i suoi sottoinsiemi è 2^n

Esempio

Sia $A = \{1, \; 2, \; 3\}$ l'insieme delle parti è:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

Il numero degli elementi dell'insieme delle parti è $2^3 = 8$

Partizione di un insieme

Definizione: La partizione di un insieme A è un insieme formato da sottoinsiemi (parti) di A che verificano le seguenti proprietà:

- Nessuno dei sottoinsieme è vuoto
- I sottoinsiemi sono a due a due disgiunti (non hanno elementi comuni)
- La loro unione darà tutto l'insieme

Esempio

Consideriamo l'insieme $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

Una partizione di A può essere formata dai sottoinsiemi B e C dei numeri pari e dei numeri dispari:

$$B=\{2, 4, 6, 8\} \qquad C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Le tre proprietà sono verificate infatti:

- B e C non sono vuoti
- B e C non hanno elementi comuni
- L'unione di B e C dà l'insieme A

Esempio

Considera l'insieme A degli studenti del tuo istituto.

Una partizione può essere quella formata dai sottoinsiemi delle classi:

$$\{1A\}\ \{2A\}\ \{3A\}\ \{4A\}\ \{5A\}\ \{1B\}\ \ldots\ldots\ldots$$

Le tre proprietà sono verificate infatti:

- in ogni classe ci sono alunni
- le classi non hanno alunni comuni, infatti se un alunno appartiene ad una classe non può appartenere ad un'altra
- l'unione di tutte le classi formano l'insieme degli studenti dell'istituto

Insiemi: Relazioni di De Morgan

Le relazioni di De Morgan sono delle relazioni tra l'intersezione e l'unione dei complementari di due insiemi e i complementari della loro intersezione e unione. I complementari, nelle relazioni di De Morgan, vanno considerati rispetto ad terzo insieme, che li contiene entrambi che prende il nome di insieme Universo.

I relazione: $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Esempio

Dato l'insieme universo

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

e gli insiemi

$$A = \{1,\ 2,\ 6,\ 9\} \qquad B = \{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$$

Verifichiamo la I relazione:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$$

$$\overline{A} = \{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$$

$$\overline{B} = \{1,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{5,\ 8\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5,\ 8\}$$

Questi ultimi insiemi contengono gli stessi elementi quindi sono uguali.

II relazione: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Esempio

Dato l'insieme universo

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

e gli insiemi

$$A = \{1,\ 2,\ 6,\ 9\} \qquad B = \{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$$

Verifichiamo la II relazione:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$\overline{A} = \{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$$

$$\overline{B} = \{1,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

Questi ultimi insiemi contengono gli stessi elementi quindi sono uguali.