Elementi di topologia della retta

nome	definizione

insieme

l'insieme è un concetto primitivo che si accetta come intuitivamente noto secondo George Cantor, il padre della teoria degli insiemi:

"Per insieme si intende un raggruppamento, concepito come un tutto, di oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero"

esempi

$A = \{ a, b, c, d \}$ $\quad B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ $\quad C = \{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 6 \}$

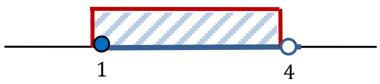
$D =]\, 1, 5\,]$ $\quad E = 1 < x < 5$ $\quad F = \{\emptyset\}$

intervallo

un intervallo è l'insieme di **tutti** i valori compresi tra due estremi (finiti o infiniti)

esempi

l'insieme $[\, 1, 4\, [$ è un intervallo perché contiene tutti i numeri compresi tra 1 e 4



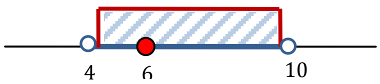
fai attenzione che un intervallo è anche un insieme ma non è detto che un insieme sia un intervallo. Ad esempio l'insieme: $\{1, 2, 3, 4\}$ non è un intervallo perché contiene solo i quattro numeri indicati e non tutti i numeri tra 1 e 4

intorno completo di un punto

l'intorno completo di un punto è un qualsiasi intervallo che contiene il punto
Può essere aperto o chiuso

esempi

dato il punto $x_0 = 6$
l'intervallo $]\, 4, 10\, [$ è un intorno completo di 6

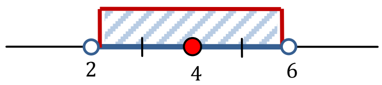


intorno circolare di un punto

l'intorno circolare di un punto è un intervallo di **centro** il punto stesso
Può essere aperto o chiuso

esempi

dato il punto $x_0 = 4$
l'intervallo $]\, 2, 6\, [$ è un intorno circolare aperto di 4



la parte $]\, 2, 4\,]$ è l' intorno sinistro di 4 e la parte $[\, 4, 6\, [$ è l' intorno destro di 4

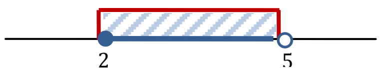
minimo di un insieme

il minimo di un insieme A è l'elemento **più piccolo appartenente** all'insieme.

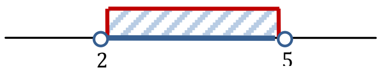
In simboli si scrive: m è il minimo di A se $\begin{cases} m \leq x & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases}$

esempi

dato l'insieme $[\, 2, 5\, [$ il minimo è 2



dato l'insieme $]\, 2, 5\, [$ il minimo *non esiste*



Osserva che il minimo di un insieme esiste solo se l'insieme è chiuso inferiormente

Elementi di topologia della retta

massimo di un insieme

il massimo di un insieme A è l'elemento **più grande appartenente** all'insieme.

In simboli si scrive: M è il massimo di A se $\begin{cases} M \geq x \ \ \forall\, x \in A \\ M \in A \end{cases}$

esempi

dato l'insieme $]\ 2, 5\ ]$ il massimo è 5

dato l'insieme $]\ 2, 5\ [$ il massimo *non esiste*

Osserva che il massimo di un insieme esiste solo se l'insieme è chiuso superiormente

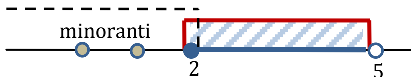
minorante di un insieme

un minorante di un insieme è un qualsiasi elemento **minore o uguale** di tutti gli elementi dell'insieme.

Il minorante non deve necessariamente appartenere all'insieme e non è unico

esempi

dato l'insieme $[\ 2, 5\ [$ $\ 2, 1, 0 \ldots$ sono minoranti



dato l'insieme $[\ 2, 5\ [$ l'insieme dei minoranti è l'intervallo $]-\infty\,, 2\ ]$

dato l'insieme $]\ 2, 5\ [$ l'insieme dei minoranti è sempre l'intervallo $]-\infty\,, 2\ ]$

Osserva che l'insieme dei minoranti, se esiste, è sempre chiuso superiormente

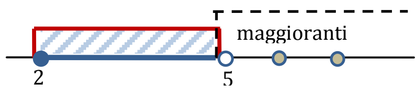
maggiorante di un insieme

un maggiorante di un insieme è un qualsiasi elemento **maggiore o uguale** di tutti gli elementi dell'insieme.

Il maggiorante non deve necessariamente appartenere all'insieme e non è unico

esempi

dato l'insieme $[2, 5\ [$ $\ 5, 6, 7 \ldots$ sono maggioranti



dato l'insieme $[\ 2, 5\ [$ l'insieme dei maggioranti è l'intervallo $[\ 5\,, +\infty\ [$

dato l'insieme $[\ 2, 5\ ]$ l'insieme dei maggioranti è sempre l'intervallo $[\ 5\,, +\infty\ [$

Osserva che l'insieme dei maggioranti, se esiste, è sempre chiuso inferiormente

estremo inferiore di un insieme

l'estremo inferiore di un insieme è il **massimo dei minoranti** dell'insieme stesso

Si indica con il simbolo ***inf (A)***

esempi

dato l'insieme $A =]\ 2, 5\ ]$ l'estremo inferiore di A è $\mathbf{2}$ in simboli: $inf(A) = \mathbf{2}$

infatti l'insieme dei minoranti di A è $]-\infty\,, 2\ ]$ il cui massimo è $\mathbf{2}$

Osserva che se l'insieme non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore è $-\infty$

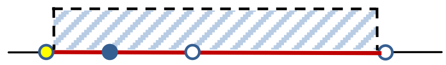
B $=]-\infty, 5\,]$ $\ inf(B) = -\infty$ C $=]\ 1, 4\ ]$ $\ inf(C) = \mathbf{1}$ D $= [\ 1, 4\ ]$ $\ inf(D) = \mathbf{1}$

Elementi di topologia della retta

proprietà

dato un insieme A l'estremo inferiore $inf\ (A)$ gode delle seguenti due proprietà:

1. $inf(A)\ \leq\ x\quad \forall\, x \in A$
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x \in A\ :\ \ x < (\, inf(A) + \varepsilon\ )$



estremo superiore di un insieme

l'estremo superiore di un insieme è il minimo dei maggioranti dell'insieme stesso

Si indica con il simbolo ***sup (A)***

esempi

dato l'insieme $A = \,]2, 5[$ l'estremo superiore di A è **5** in simboli: $supf(A) = \mathbf{5}$

infatti l'insieme dei maggioranti di A è $[\ 5\,, +\infty\ [$ il cui minimo è **5**

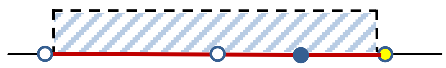
Osserva che se l'insieme A non è limitato superiormente, l'estremo superiore è $+\ \infty$

$B =]3, +\infty[\quad sup(B) = +\infty\qquad C =]\ 3, 7\ ]\quad sup(C)\ = \mathbf{7}\qquad D =]\ 3, 7\ [\quad sup(D)\ = \mathbf{7}$

proprietà

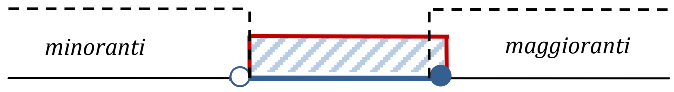
dato un insieme A l'estremo superiore $sup\ (A)$ gode delle seguenti due proprietà:

1. $sup(A)\ \geq\ x\quad \forall\, x \in A$
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \boldsymbol{x} \in A\ :\ \ x > (\, sup(A) - \varepsilon\ )$



esempi di riepilogo

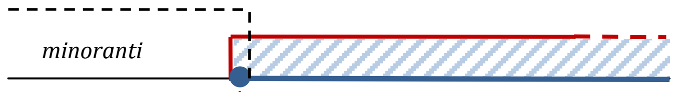
dato l'insieme $A = \,]1, 9\,]$ si ha che:



- A è un intervallo limitato
- A è aperto inferiormente e chiuso superiormente
- il minimo di A non esiste, il massimo di A è 9

- l'insieme dei minoranti di A è l'intervallo $]-\infty,\ 1\ ]$
- l'insieme dei maggioranti di A è l'intervallo $[\ 9,\ +\infty\ [$
- l'estremo inferiore di A è 1, l'estremo superiore è 9

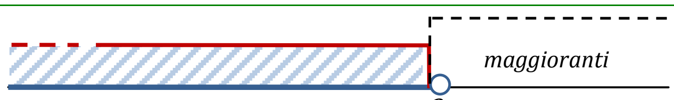
dato l'insieme $B = [\ 1, +\infty\,[$ si ha che:



- B è un intervallo non limitato superiormente
- B è chiuso inferiormente e aperto superiormente
- il minimo di B è 1, il massimo di B non esiste

- l'insieme dei minoranti di B è l'intervallo $]-\infty,\ 1\ ]$
- l'insieme dei maggioranti di B è vuoto
- l'estremo inferiore di B è 1, l'estremo superiore è $+\infty$

dato l'insieme $C = \ ]-\infty, 2\ [$ si ha che:



- C è un intervallo non limitato inferiormente
- C è aperto inferiormente e superiormente
- il minimo e il massimo di C non esistono

- l'insieme dei minoranti di C è vuoto
- l'insieme dei maggioranti di C è l'intervallo $[2, +\infty[$
- l'estremo inferiore di C è $-\infty$, l'estremo superiore è 2

Elementi di topologia della retta

punto di accumulazione per un insieme

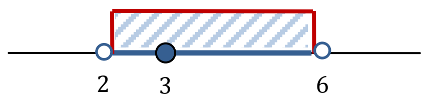
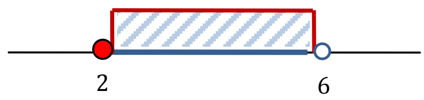
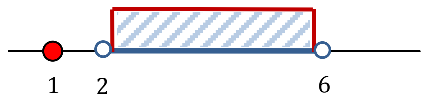
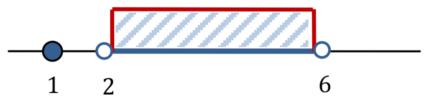
un punto si dice di accumulazione per un insieme se **in ogni** intorno del punto vi è **almeno** un elemento dell'insieme **distinto** dal punto stesso

fai attenzione che:

- l'appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto sia di accumulazione per l'insieme
- la non appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto non sia di accumulazione per l'insieme

I successivi quattro esempi illustrano i possibili casi

esempi

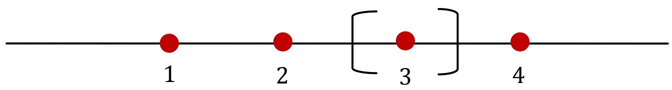
x_0 appartiene ad A x_0 **è** di accumulazione per A	sia $x_0 = 3$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 3 appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 **è** di accumulazione per A	sia $x_0 = 2$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 2 non appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 non **è** di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 1 non appartiene ad A e non è di accumulazione	
x_0 appartiene ad A x_0 non **è** di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = \{1\} \cup]\,2\,,6\,[$ 1 appartiene ad A e non è di accumulazione	

un punto che appartiene ad un insieme ma non è di accumulazione per l'insieme stesso si dice **punto isolato**

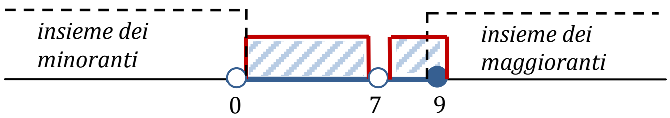
ulteriori esempi

dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ nessuno dei quattro elementi di A è un punto di accumulazione per A.

Infatti, scelto ad esempio l'elemento 3, esiste un suo intorno $]\,2{,}5\ ,\ 3{,}5\,[$ che non contiene alcun elemento di A distinto da 3 stesso. Analoga conclusione per gli altri tre elementi di A



dato l'insieme $B =]\,0, 7\,[\cup]\,7, 9\,]$ si ha che



- il minimo di B non esiste, il massimo è 9
- l'insieme dei minoranti di B è $]\,-\infty,\ 0\,]$
- l'insieme dei maggioranti di B è $[\,9, +\infty\,[$
- l'estremo inferiore è 0

- l'estremo superiore 9
- 0 e 9 sono di accumulazione per B
- 7 è di accumulazione per B
- tutti i numeri tra 0 e 9 sono di accumulazione per l'insieme B