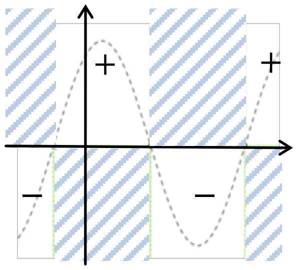
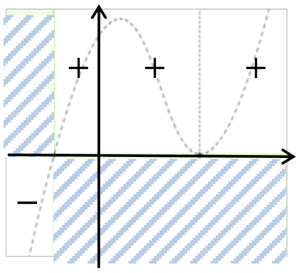
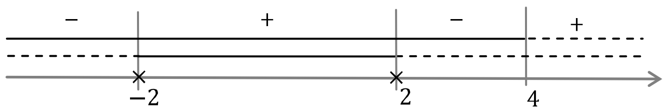
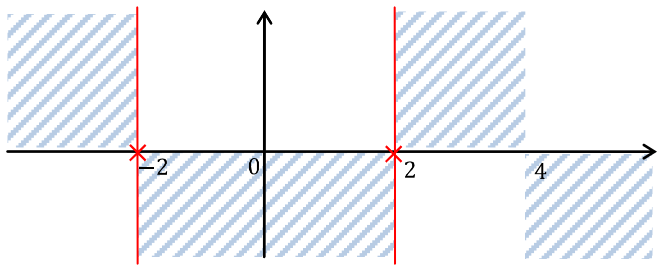
Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

studio del segno della funzione

scopo: lo studio del segno individua le regioni di piano in cui la funzione è positiva $(+)$, cioè si trova nel semipiano delle ordinate positive (al di sopra dell'asse delle x), o negativa $(-)$, cioè si trova nel semipiano delle ordinate negative (al di sotto dell'asse delle x). Lo studio del segno va svolto ovviamente solo all'interno del dominio della funzione

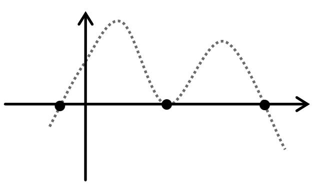
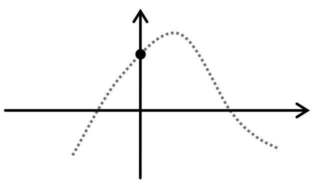
		*come si cerca:* • si pone la funzione maggiore di zero • si risolve la disequazione $f(x) > 0$ • si cancellano le regioni di piano dove la funzione **NON** esiste

esempio

Studiamo il segno della seguente funzione	$f(x) = \dfrac{4-x}{4-x^2}$
si studia innanzitutto il dominio	$4-x^2 \neq 0 \;\rightarrow\; \forall x \in \mathcal{R} - \{\pm 2\}$
si pone la funzione maggiore di zero	$f(x) = \dfrac{4-x}{4-x^2} > 0$
si risolve la disequazione $f(x) > 0$	$\dfrac{4-x}{4-x^2} > 0 \;\rightarrow\; \left\Vert \begin{array}{l} 4-x>0 \\ 4-x^2>0 \end{array} \right. \;\rightarrow\; \left\Vert \begin{array}{l} x<4 \\ -2<x<2 \end{array} \right.$ 
si cancellano le regioni di piano dove la funzione **non** esiste: • nell'intervallo dove la funzione è negativa si cancella la parte di piano al di sopra dell'asse x • nell'intervallo dove la funzione è positiva si cancella la parte di piano al di sotto dell'asse x	

studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani

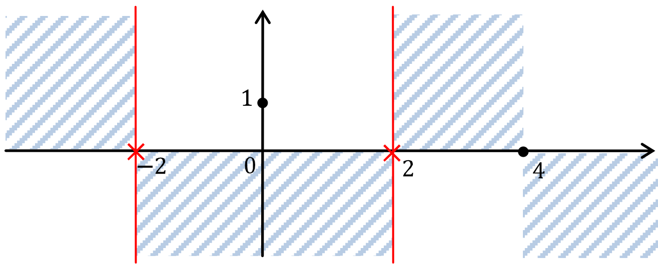
scopo: lo studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani individua i punti di contatto della funzione con l'asse x e con l'asse y. I primi sono anche detti "zeri della funzione" perché hanno $y = 0$

	$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \boldsymbol{f(x) = 0}$	**intersezioni con l'asse x** o zeri della funzione *come si cercano:* • si pone la funzione uguale a zero, si risolve l'equazione • le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione
	$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \boldsymbol{y = f(0)}$	**intersezione con l'asse y** (solo se il dominio lo consente) *come si cerca:* • si sostituisce 0 alla x nella funzione • si svolgono i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle y

Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

esempio	
Studiamo le intersezioni con gli assi cartesiani della seguente funzione	$f(x)=\dfrac{4-x}{4-x^2}$
cerchiamo le intersezioni con l'asse x ponendo la funzione uguale a zero	$f(x)=\dfrac{4-x}{4-x^2}=0$
risolviamo l'equazione; la soluzione è l'ascissa del punto di intersezione cercato	$\dfrac{4-x}{4-x^2}=0 \;\rightarrow\; 4-x=0 \;\rightarrow\; x=4$
cerchiamo le intersezioni della funzione con l'asse y sostituendo 0 alla x nella funzione; si sviluppano i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto cercato	$f(0)=\dfrac{4-0}{4-0} \;\rightarrow\; y=1$

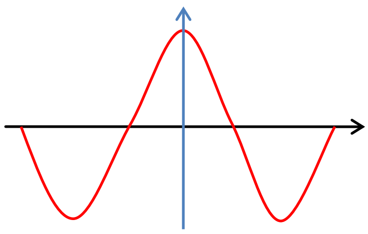
gli eventuali punti di intersezione della funzione con l'asse $\boldsymbol{x}$ si possono anche dedurre osservando il grafico dello studio del segno (per esempio, il grafico a destra). Due zone successive di segno opposto sono separate da un punto di intersezione della funzione con l'asse $\boldsymbol{x}$ (sempre se il punto appartiene al dominio); due zone successive dello stesso segno individuano invece un punto di contatto della funzione con l'asse delle $\boldsymbol{x}$ (sempre se il punto appartiene al dominio)



studio delle simmetrie di una funzione

scopo: la presenza di eventuali simmetrie semplifica la ricerca del grafico della funzione. Ciò consente di studiare analiticamente la funzione solo nel semipiano positivo delle ascisse e successivamente di ribaltarne il grafico ottenuto nel semipiano negativo, rispetto all'asse y se la funzione è pari, oppure rispetto all'origine se la funzione è dispari

simmetria rispetto all'asse y o simmetria pari



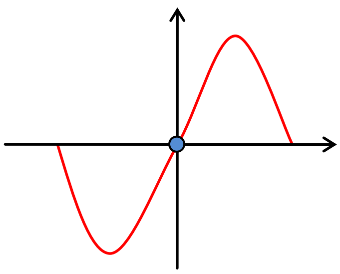
definizione:

una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y si dice pari

come si cerca:

- si sostituisce x con $-x$ nel testo della funzione
- si sviluppano i calcoli
- se $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ la funzione è pari

simmetria rispetto all'origine o simmetria dispari



definizione:

una funzione simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani si dice dispari

come si cerca:

- si sostituisce x con $-x$ nel testo della funzione
- si sviluppano i calcoli e si raccoglie il segno "**−**"
- se $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$ la funzione è dispari

esempi		
1.	Studiamo la simmetria della seguente funzione	$f(x)=\dfrac{4-x}{4-x^2}$
sostituiamo x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppiamo i calcoli		$f(-x)=\dfrac{4-(-x)}{4-(-x)^2}=\dfrac{4+x}{4-x^2}$

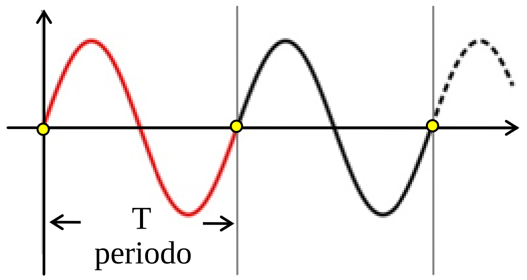
Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

confrontiamo il testo ottenuto della $f(-x)$ con quello iniziale della $f(x)$ e notiamo che sono diversi	$f(-x) \neq f(x)$ $\rightarrow$ la funzione **non** è pari
raccogliamo il segno "$-$" nel testo della $f(-x)$	$f(-x) = -\left(\frac{-4-x}{4-x^2}\right)$
confrontiamo il testo della $f(-x)$ con quello della $-f(x)$ e notiamo che sono diversi	$f(-x) \neq -f(x)$ $\rightarrow$ la funzione **non** è nemmeno dispari

2.	Studiamo la simmetria della seguente funzione	$f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
sostituiamo x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppiamo i calcoli		$f(-x) = \frac{(-x)}{4-(-x)^2} = \frac{-x}{4-x^2}$
confrontiamo il testo ottenuto della $f(-x)$ con quello iniziale della $f(x)$ e notiamo che sono diversi		$f(-x) \neq f(x)$ $\rightarrow$ la funzione **non** è pari
raccogliamo il segno "$-$" nel testo della $f(-x)$		$f(-x) = -\left(\frac{x}{4-x^2}\right)$
confrontiamo il testo della $f(-x)$ con quello della $-f(x)$ e notiamo che sono uguali		$f(-x) = -f(x)$ $\rightarrow$ la funzione **è** dispari

⚠ lo studio delle eventuali simmetrie di una funzione si effettua in genere dopo aver calcolato il dominio e studiato il segno della funzione. Ciò è un vantaggio perché solo se il dominio ed il grafico del segno sono entrambi simmetrici allora (e solo allora) la funzione potrebbe essere simmetrica ed ha senso studiarne algebricamente le simmetrie. Viceversa se il dominio o il grafico del segno NON sono entrambi simmetrici la funzione NON potrà essere simmetrica.
Ciò è evidente osservando il grafico dell'esempio dello studio del segno della funzione

studio della periodicità di una funzione



definizione:
una funzione che ripete a intervalli regolari la sua forma si dice periodica e la dimensione dell'intervallo ripetuto si dice periodo e si indica con T

come si cerca il periodo T della funzione:

- si pone $\boldsymbol{f(x+T) = f(x)}$ ottenendo una equazione
- si risolve l'equazione nell'incognita T
- il valore trovato di T è il periodo della funzione

esempi

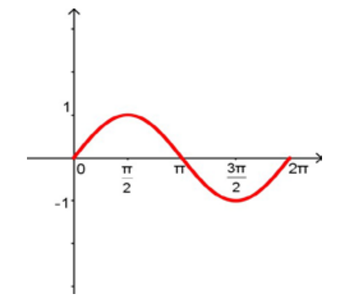
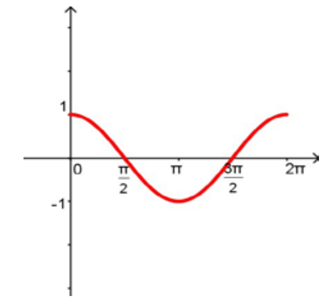
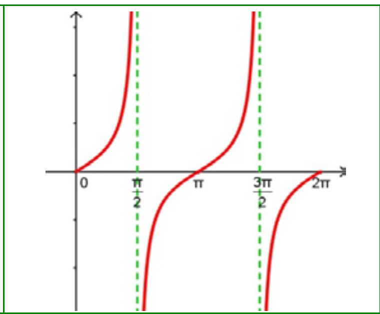
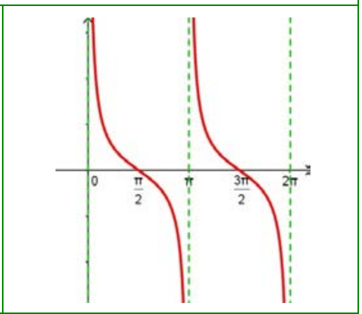
1.	Calcoliamo il periodo della seguente funzione	$f(x) = sen(5x)$
poniamo $f(x+T) = f(x)$ ottenendo una equazione		$sen\big(5(x+T)\big) = sen(5x) \rightarrow sen(5x+5T) = sen(5x)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T		$5x + 5T = 5x + 2k\pi \rightarrow 5T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{2}{5}k\pi$
il periodo richiesto si trova ponendo $k = 1$		$T = \frac{2}{5}k\pi \rightarrow per\ k = 1 \rightarrow \boldsymbol{T = \frac{2}{5}\pi}$

2.	Calcoliamo il periodo della seguente funzione	$f(x) = tg\left(\frac{x}{5}\right)$
poniamo $f(x+T) = f(x)$ ottenendo una equazione		$tg\left(\frac{1}{5}(x+T)\right) = tg\left(\frac{x}{5}\right) \rightarrow tg\left(\frac{x}{5}+\frac{T}{5}\right) = tg\left(\frac{x}{5}\right)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T		$\frac{x}{5}+\frac{T}{5} = \frac{x}{5} + k\pi \rightarrow T = 5k\pi$

il periodo richiesto si trova ponendo $k=1$	$T=5k\pi \quad \to per\ k=1 \quad \to \boldsymbol{T=5\pi}$

osservazioni

- il calcolo del periodo di una funzione si effettua solo se la funzione è **composta da funzioni periodiche**
  Ricordiamo che le funzioni periodiche elementari sono: $sen\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$, $cotg\,x$. Le prime due hanno periodo uguale a 2π, le ultime due hanno periodo uguale a π, come si vede dai loro grafici qui sotto riportati

			
seno	coseno	tangente	cotangente

- la ricerca del periodo di una funzione si effettuata risolvendo un'equazione goniometrica. In molti casi lo svolgimento dell'equazione può risultare complesso per cui è utile ricordare alcune regole pratiche:
  a) data una funzione $f(x)$ di periodo T : il periodo di $f(\boldsymbol{n}x)$ è $\frac{T}{\boldsymbol{n}}$ il periodo di $f\left(\frac{x}{\boldsymbol{n}}\right)$ è $\boldsymbol{n}T$

$sen(7x) \ \to \ T=\frac{2\pi}{7}$	$cos\left(\frac{x}{5}\right) \ \to \ T=10\pi$	$tg(3x) \ \to \ T=\frac{\pi}{3}$	$cotg\left(\frac{x}{4}\right) \ \to \ T=4\pi$

b) data una funzione composta dalla somma (o differenza) di funzioni periodiche il suo periodo è uguale al minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni che la compongono

$$f(x)=sen(7x)+tg(3x) \quad \to \ T=m.c.m.\left\{\frac{2}{7}\pi;\ \frac{1}{3}\pi\right\} \ \to \ T=m.c.m.\left\{\frac{6}{21}\pi;\ \frac{7}{21}\pi\right\} \ \to \ T=\frac{42}{21}\pi \ \to T=2\pi$$

$$f(x)=cotg\left(\frac{x}{4}\right)-sen(3x) \ \to \ T=m.c.m.\left\{4\pi;\ \frac{2}{3}\pi\right\} \ \to \ T=m.c.m.\left\{\frac{12}{3}\pi;\ \frac{2}{3}\pi\right\} \ \to \ T=\frac{12}{3}\pi \ \to \ T=4\pi$$

quesiti tratti da tracce di esami di stato di liceo scientifico

1. *"Sia $g(x)=sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$. Qual è il suo periodo?"*	(Tratto dall'esame di Stato 2012 problema 1 prima domanda)
poniamo $g(x+T)=g(x)$ ottenendo una equazione	$sen\left(\frac{3}{2}\pi(x+T)\right)=sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$\frac{3}{2}\pi x+\frac{3}{2}\pi T=\frac{3}{2}\pi x+2k\pi \ \to \ \frac{3}{2}\pi T=2k\pi \ \to \ T=\frac{4}{3}k$
il periodo richiesto si trova ponendo $k=1$	$T=\frac{4}{3}$
applicando la regola pratica si ha	$sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \ \to T=\frac{2\pi}{3\pi/2} \ \to T=\frac{4}{3}$

2. *"Si determini il periodo della funzione $f(x)=cos(5x)$"*	(Tratto dall'esame di Stato 2009 quesito 10)
poniamo $f(x+T)=f(x)$ ottenendo una equazione	$cos(5(x+T))=\cos(5x)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$5x+5T=5x+2k\pi \ \to 5T=2k\pi \ \to \ T=\frac{2}{5}k\pi$
il periodo richiesto si trova ponendo $k=1$	$T=\frac{2}{5}\pi$
applicando la regola pratica si ha	$cos(5x) \ \to \mathrm{T}=\frac{2\pi}{5}$