Serie numeriche

definizioni

Data la successione $\{a_n\} = \; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si considerino le **somme parziali** $s_1, s_2, \dots, s_n$:

$$\boldsymbol{s_1} = a_1 \qquad \boldsymbol{s_2} = a_1 + a_2 \qquad \boldsymbol{s_3} = a_1 + a_2 + a_3 \qquad \boldsymbol{s_n} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

si dice **serie** di termine generale a_n e si indica con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ oppure con $\sum a_n$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum a_n$$

carattere della serie

se S è finito	• la serie $\sum a_n$ si dice **convergente**
se $S = \pm\infty$	• la serie $\sum a_n$ si dice **divergente** (positivamente o negativamente)
altrimenti	• la serie $\sum a_n$ è **indeterminata**

prime proprietà

Se $\sum a_n$ converge $\to \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$	condizione **necessaria** ma non sufficiente per la convergenza di una serie è che il termine generico sia infinitesimo

assegnate $\sum a_n$ e $\sum b_n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

se $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum \lambda\, a_n$ converge	convergenza del **prodotto** di una costante per una serie
se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono $\to \sum (a_n + b_n)$ converge	convergenza della **somma** di due serie

serie notevoli

simbologia		carattere	nome
$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \cdots$	$\sum \frac{1}{n}$	divergente	serie armonica
$1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ $\quad p \in \mathbb{R}$	$\sum \frac{1}{n^p}$	$p \le 1$ divergente $p > 1$ convergente	serie armonica generalizzata
$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$	$q \le -1$ irregolare $-1 < q < 1$ convergente $q \ge 1$ divergente	serie geometrica di ragione q
$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n$	$q \le -1$ irregolare $-1 < q < 1$ convergente $q \ge 1$ divergente	serie geometrica di punto iniziale a e ragione q
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$	$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$	convergente	serie di Mengoli

Serie numeriche

Criteri di convergenza

criterio del confronto per serie a termini non negativi

Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sia: • $0 \le a_n \le b_n$	se $\sum b_n$ converge $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge se $\sum a_n$ diverge $\rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

criterio del confronto mediante i limiti per serie a termini non negativi

Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sia: • $a_n \ge 0,\ b_n \ge 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$	se $0 < l < +\infty$ $\rightarrow$ le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono **entrambe** convergenti oppure divergenti
	se $l = 0$ e $\sum b_n$ converge $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge $\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

criterio degli infinitesimi per serie a termini non negativi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n \ge 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p a_n = l$ con $p \in \mathbb{R}$	se $0 < l < +\infty$	$p > 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge $p \le 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 0$ e	$p > 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l = +\infty$ e	$p \le 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

criterio della radice o di Cauchy per serie a termini positivi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n > 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ con $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$	se $l < 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l > 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 1$ $\rightarrow$ non si può dire nulla

può essere utile in caso di serie con esponenziali

criterio del rapporto o di D'Alembert per serie a termini positivi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n > 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ con $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$	se $l < 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l > 1$ $\rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 1$ $\rightarrow$ non si può dire nulla

può essere utile in caso di serie con fattoriali

criterio di Leibnitz per serie con termini a segno alterno decrescente

Data la successione $\{a_n\}$ sia: $a_n \ge 0$ Data la serie alternante $\sum(-1)^n a_n$	• se $a_{n+1} \le a_n$ • se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\rightarrow$ $\sum(-1)^n a_n$ converge

criterio di convergenza assoluta

Data la serie $\sum a_n$ e la serie $\sum \lvert a_n \rvert$	se $\sum \lvert a_n \rvert$ converge $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge