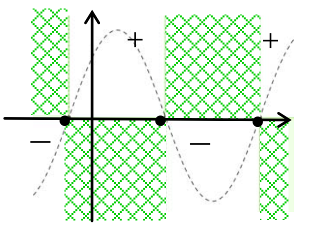
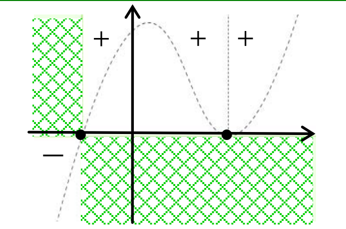
Studio del grafico di una funzione

1 ricerca del dominio (o campo di esistenza) della funzione

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$	$y = [f(x)]^{\alpha}$ α *frazione positiva o irrazionale positivo* $f(x) \geq 0$	$y = ctg\, f(x)$ $f(x) \neq k\pi$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ *n pari* $f(x) \geq 0$	$y = [f(x)]^{\alpha}$ α *frazione negativa o irrazionale negativo* $f(x) > 0$	$y = arcsen\, f(x)$ $-1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_a f(x)$ $f(x) > 0$	$y = f(x)^{g(x)}$ $f(x) > 0$	$y = arccos\, f(x)$ $-1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_{g(x)} f(x)$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	$y = tg\, f(x)$ $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$	Le funzioni che non compaiono in questa tabella (ad esclusione di quelle iperboliche) sono definite $\forall\, x \in \mathcal{R}$

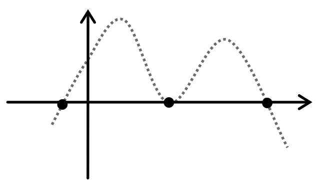
2 studio del segno della funzione





- si pone la funzione maggiore di zero
- si risolve la disequazione $f(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove la funzione è positiva (+) o negativa (−) all'interno del dominio
- si cancellano le regioni di piano dove la funzione **non** esiste

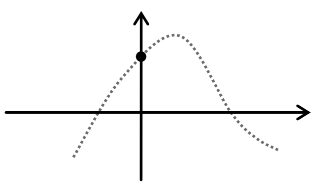
3 studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani



$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0}$

intersezioni con l'asse x o zeri della funzione:

- si pone la funzione uguale a zero, si risolve l'equazione
- le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione



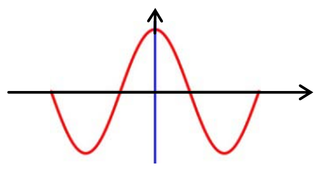
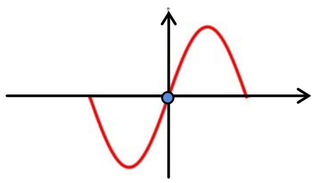
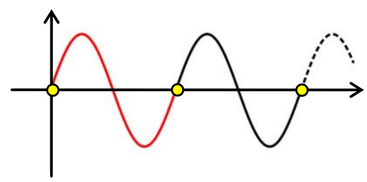
$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y = f(0)}$

intersezione con l'asse y (solo se il dominio lo consente):

- si sostituisce 0 alla x nella funzione
- si svolgono i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle y

gli eventuali punti di intersezione con l'asse *x* (o zeri della funzione) si possono anche dedurre dalla osservazione del grafico relativo allo studio del segno della funzione

4 studio delle eventuali simmetrie e periodicità di una funzione

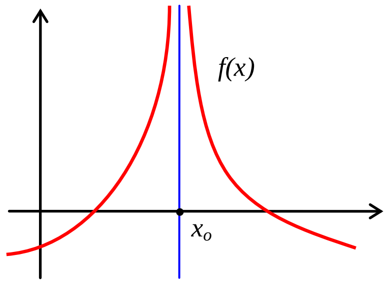
una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y si dice **pari**	una funzione simmetrica rispetto all'origine degli assi si dice **dispari**	una funzione che ripete periodicamente la forma si dice **periodica**
		
• si sostituisce x con − x • si sviluppano i calcoli • se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ • la funzione è pari	• si sostituisce x con − x • si sviluppano i calcoli e si raccoglie il "−" • se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ • la funzione è dispari	• si sostituisce x con $(x + T)$ • si sviluppano i calcoli • se $\boldsymbol{f(x+T) = f(x)}$ • la funzione è periodica di periodo T

lo studio delle simmetrie si effettua **solo se** il dominio e il segno sono a loro volta entrambi simmetrici

Studio del grafico di una funzione

5 asintoti di una funzione

asintoto verticale $x = x_0$



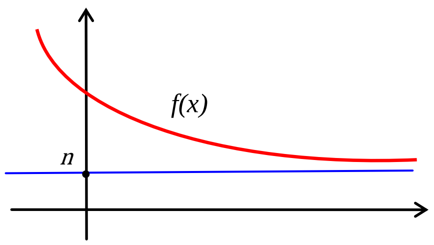
dove si cerca:

- nei punti x_0 di discontinuità della funzione
- nei punti agli estremi del dominio di $f(x)$ se sono finiti e non appartenenti al dominio stesso

come si cerca:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} n \ finito & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ \pm\infty & \to \ Esiste \ \to \ \boldsymbol{x = x_0} \end{cases}$$

asintoto orizzontale $y = n$



dove si cerca:

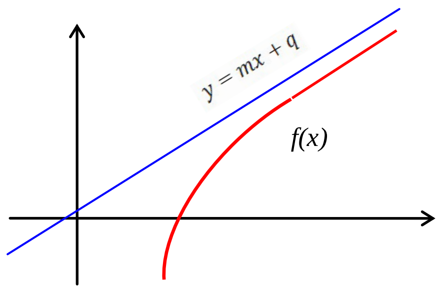
- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente

come si cerca:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ n\ finito & \to \ Esiste \ \to \ \boldsymbol{y = n} \end{cases}$$

- solo se l'asintoto orizzontale non esiste, si cerca l'asintoto obliquo

asintoto obliquo $y = mx + q$



dove si cerca:

- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente e se non esiste già l'asintoto orizzont

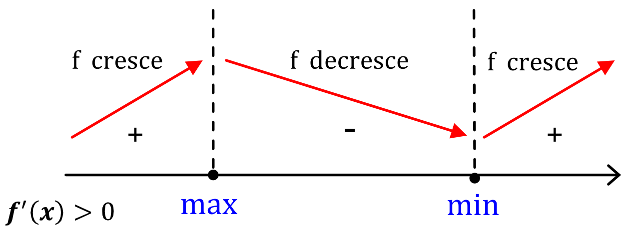
come si cerca:

$$\boldsymbol{m} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \begin{cases} \pm\infty & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ 0 & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ m\ finito & \to \ si\ cerca\ q \end{cases}$$

$$\boldsymbol{q} = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \begin{cases} \pm\infty & \to l'asintoto\ Non\ Esiste \\ q\ finito & \to Esiste \to \boldsymbol{y = mx + q} \end{cases}$$

6 studio della monotonia di $f(x)$ e ricerca dei massimi e minimi relativi

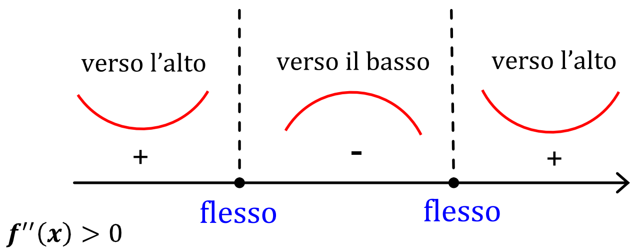
monotonia



- si calcola la derivata prima di $f(x)$ e la si pone maggiore di 0
- si risolve la disequazione $f'(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove:
  $f'(x) > 0 \to f(x)$ è crescente ↗
  $f'(x) < 0 \to f(x)$ è decrescente ↘
- osservando il grafico della crescenza e decrescenza si individuano i punti di massimo e di minimo. Essi vanno considerati **solo se** appartengono al dominio della funzione

7 studio della concavità e ricerca dei flessi di una funzione

concavità



- si calcola la derivata seconda di $f(x)$e la si pone maggiore di 0
- si risolve la disequazione $f''(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove:
  $f''(x) > 0 \to f(x)$ è concava verso l'alto ∪
  $f''(x) < 0 \to f(x)$ è concava verso il basso ∩
- osservando il grafico della concavità si possono individuare i punti di flesso. Essi vanno considerati **solo se** appartengono al dominio della funzione

Per ottenere una maggiore precisione nel disegno del grafico si possono calcolare le coordinate di alcuni suoi punti attribuendo valori arbitrari (appartenenti al dominio) alla x nel testo della funzione $y = f(x)$ e calcolando le rispettive y