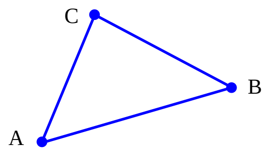
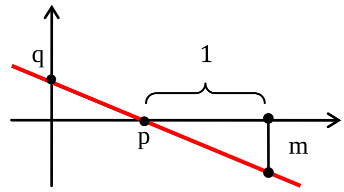
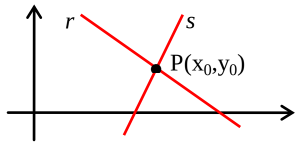
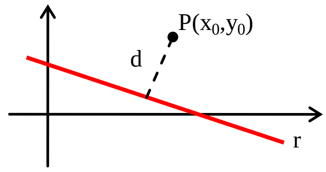
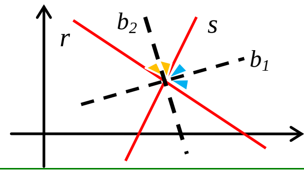
Geometria analitica in sintesi

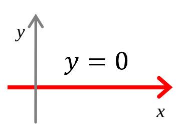
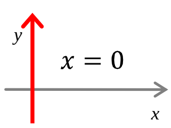
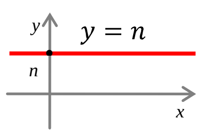
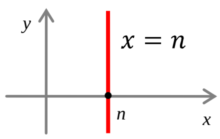
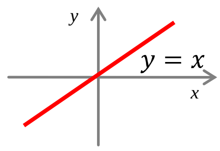
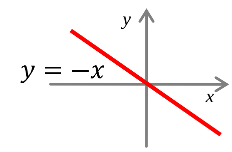
punti

$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	**distanza tra due punti** $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$	
$x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2} \qquad y_M = \dfrac{y_1+y_2}{2}$	**punto medio** $M(x_M,y_M)$ tra due punti $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$	
$x_G = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \qquad y_G = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$	**baricentro** $G(x_G,y_G)$ di un triangolo di vertici $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$	
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}$ $\frac{1}{2}\lvert x_1y_2+y_1x_3+x_2y_3-y_2x_3-x_1y_3-y_1x_2\rvert$	**area di un triangolo** di vertici $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$	

retta

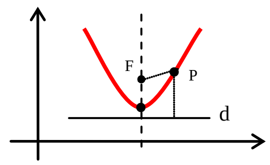
$ax+by+c=0$	forma implicita	equazione della retta **m** = coefficiente angolare **q** = intersezione con l'asse delle y **p** = intersezione con l'asse delle x	
$y = mx+q$ $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$	forma esplicita		
$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$	forma segmentaria		
$m_{AB} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		**coefficiente angolare** della retta passante per due punti $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$	
$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$		equazione della **retta passante per due punti** $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$	
$y-y_0 = m(x-x_0)$		equazione della **retta passante per un punto** $P(x_0,y_0)$ di coefficiente angolare **m**	
$m_r = m_s$		condizioni di **parallelismo** tra due rette r ed s	//
$m_r = -1/m_s$ oppure $m_r \cdot m_s = -1$		condizioni di **perpendicolarità** tra due rette r ed s	$\perp$
$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases} \rightarrow x_0, y_0 \rightarrow P(x_0,y_0)$		punto $P(x_0,y_0)$ di **intersezione** tra due rette r ed s	
$d = \dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	retta in forma implicita	**distanza** di un punto $P(x_0,y_0)$ da una retta r	
$d = \dfrac{\lvert y_0-mx_0-n\rvert}{\sqrt{m^2+1}}$	retta in forma esplicita		
$\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$		equazione delle **bisettrici** degli angoli formati da due rette r, s r: $a_1x+b_1y+c_1=0$ s: $a_2x+b_2y+c_2=0$	
$tg\,\alpha = \dfrac{m_r-m_s}{1+m_rm_s}$		tangente dell'**angolo** formato da due rette r ed s di coefficiente angolare m_r ed m_s	

rette particolari

					
asse x	asse y	parallela asse x	parallela asse y	bisettrice I e III q.	bisettrice II e IV q.

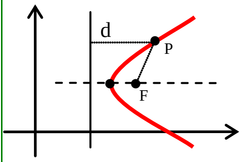
Geometria analitica in sintesi

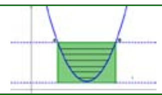
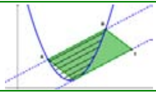
parabola



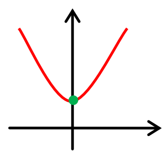
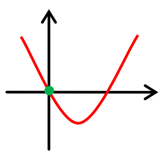
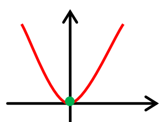
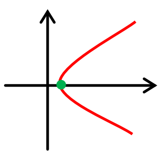
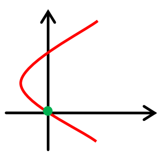
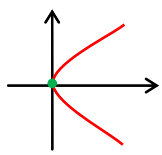
La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice:

$$\overline{PF} = Pd$$

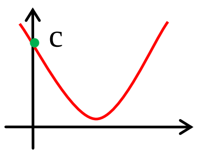


parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y		parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
$y = ax^2 + bx + c$	equazione completa	$x = ay^2 + by + c$
$V\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$	coordinate del **vertice**	$V\left(\frac{-\Delta}{4a};\frac{-b}{2a}\right)$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$
$F\left(\frac{-b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$	coordinate del **fuoco**	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a};\frac{-b}{2a}\right)$
$x = \frac{-b}{2a}$	equazione dell'**asse**	$y = \frac{-b}{2a}$
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	equazione della **direttrice**	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$
$\frac{y_0+y}{2} = ax_0 \cdot x + b\frac{x_0+x}{2} + c$	equazione della retta tangente alla parabola in un **suo** punto $P_0(x_0, y_0)$: formula di **sdoppiamento**	$\frac{x_0+x}{2} = ay_0 \cdot y + b\frac{y_0+y}{2} + c$
$\mathcal{A} = \frac{2}{3}\mathcal{R}$	**area** del segmento parabolico	 

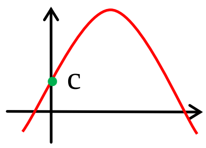
parabole particolari

					
$b = 0$ $y = ax^2 + c$	$c = 0$ $y = ax^2 + bx$	$b = 0 \quad c = 0$ $y = ax^2$	$b = 0$ $x = ay^2 + c$	$c = 0$ $x = ay^2 + by$	$b = 0 \quad c = 0$ $x = ay^2$

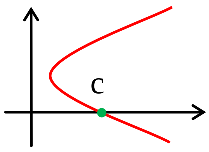
significato grafico del coefficiente **a** e del coefficiente **c**



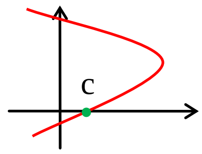
$a > 0$



$a < 0$



$a > 0$

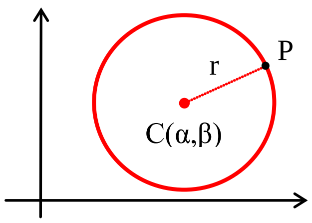


$a < 0$

se a = 0 la parabola degenera in una retta

circonferenza

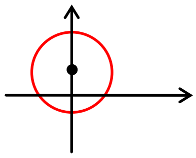
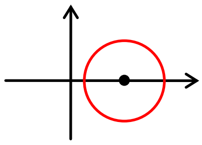
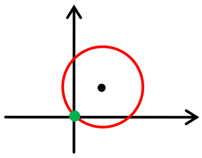
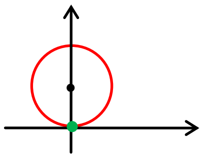
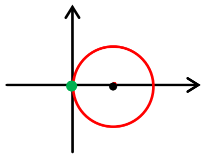
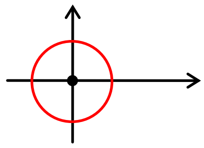
La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro: $\quad \overline{PC} = r$



$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	equazione completa
$C(\alpha, \beta)$ $\quad \alpha = -a/2$ $\quad \beta = -b/2$	coordinate del **centro** C
$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$	relazione del **raggio** r
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$	equazione della circonferenza di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r
$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + a\frac{x_0+x}{2} + b\frac{y_0+y}{2} + c = 0$	equazione della retta tangente alla circonferenza in un **suo** punto $P_0(x_0, y_0)$: formula di **sdoppiamento**
$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$	equazione dell'**asse radicale** di due circonferenze

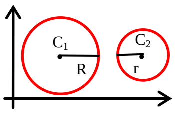
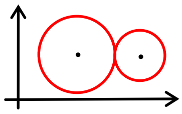
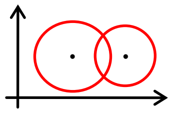
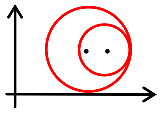
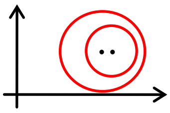
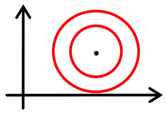
Geometria analitica in sintesi

circonferenze particolari

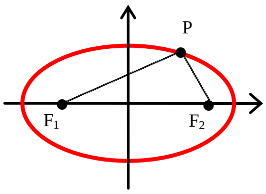
					
$a=0$ $x^2+y^2+by+c=0$	$b=0$ $x^2+y^2+ax+c=0$	$c=0$ $x^2+y^2+ax+by=0$	$a=c=0$ $x^2+y^2+by=0$	$b=c=0$ $x^2+y^2+ax=0$	$a=b=0$ $x^2+y^2=r^2$

se $a=b=c=0$ la circonferenza si riduce al punto $O(0,0)$ origine degli assi cartesiani

posizioni reciproche di due circonferenze

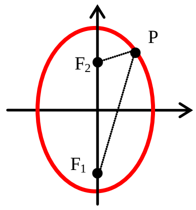
					
$C_1C_2 > R+r$ esterne	$C_1C_2 = R+r$ tangenti esterne	$R-r < C_1C_2 < R+r$ secanti	$C_1C_2 = R-r$ tangenti interne	$C_1C_2 < R-r$ interne	$C_1C_2 = 0$ concentriche

ellisse



L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante:

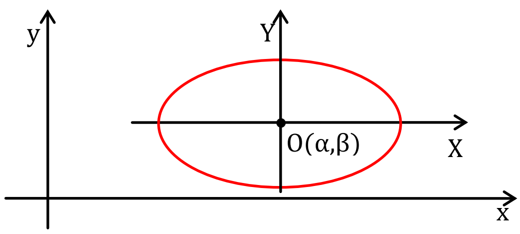
$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\textbf{costante}$$



ellisse con i fuochi sull'asse x		ellisse con i fuochi sull'asse y
$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$		$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2b$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad a>b$	equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad a<b$
$2a$	lunghezza asse maggiore	$2b$
$2b$	lunghezza asse minore	$2a$
$2c$	distanza focale	$2c$
$a^2=b^2+c^2$	relazione tra i parametri a, b, c	$b^2=a^2+c^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $\quad F_2(c;\ 0)$	coordinate dei **fuochi**	$F_1(0;-c)$ $\quad F_2(0\,;c)$
$e=\frac{c}{a}$ $\quad 0<e<1$	**eccentricità**	$e=\frac{c}{b}$ $\quad 0<e<1$
$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$	equazione della retta tangente alla ellisse nel **suo** punto $P_0(x_0,y_0)$: formula di **sdoppiamento**	$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$

ellisse traslata

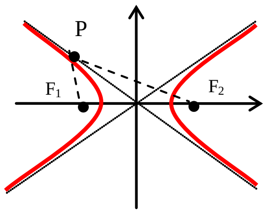
l'ellisse si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y



$O(\alpha,\beta)$	coordinate del centro dell'ellisse
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	equazione dell'ellisse riferita al sistema XOY

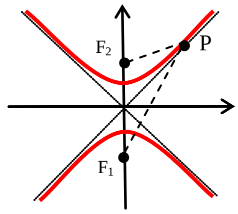
Geometria analitica in sintesi

iperbole



L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = costante$$



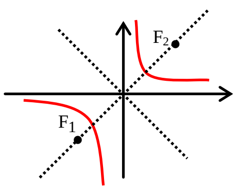
iperbole con i fuochi sull'asse x	iperbole con i fuochi sull'asse y
$\lvert\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\rvert = 2a$	$\lvert\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\rvert = 2b$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
$2a$	lunghezza asse trasverso	$2b$
$2b$	lunghezza asse non trasverso	$2a$
$2c$	distanza focale	$2c$
$c^2 = a^2 + b^2$	relazione tra i parametri a, b, c	$c^2 = a^2 + b^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;\ 0)$	coordinate dei **fuochi**	$F_1(0; -c\ )$ $F_2(0\ ; c)$
$y = \pm\frac{b}{a}x$	equazione degli **asintoti**	$y = \pm\frac{b}{a}x$
$e = \frac{c}{a}$ $e > 1$	**eccentricità**	$e = \frac{c}{b}$ $e > 1$
$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$	equazione della retta tangente alla iperbole nel **suo** punto $P_0(x_0, y_0)$: formula di **sdoppiamento**	$b^2x_0x - a^2y_0y = -a^2b^2$

iperbole equilatera: a = b

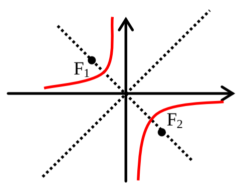
$x^2 - y^2 = a^2$	equazione	$x^2 - y^2 = -a^2$
$c^2 = 2a^2$	relazione tra a, c	$c^2 = 2a^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;\ 0)$	coordinate dei fuochi	$F_1(0; -c)$ $F_2(0: c)$
$y = -x$ $y = x$	equazione degli asintoti	$y = -x$ $y = x$

iperbole equilatera ruotata di $\pm 45°$



k > 0

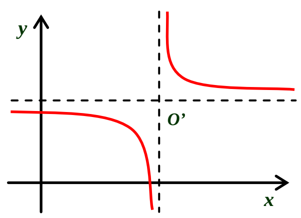
equazione
$xy = k$



k < 0

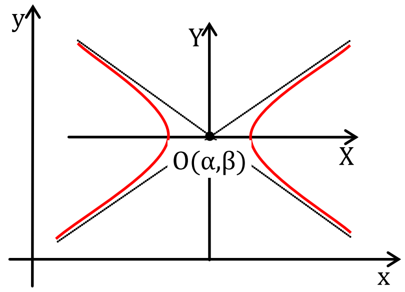
$F_1(-\sqrt{2k}\ ; -\sqrt{2k})$ $F_2(\sqrt{2k}\ ; \sqrt{2k})$	coordinate dei fuochi	$F_1(-\sqrt{-2k}\ ; \sqrt{-2k})$ $F_2(\sqrt{-2k}\ ; -\sqrt{-2k})$

iperbole equilatera ruotata e traslata o funzione omografica



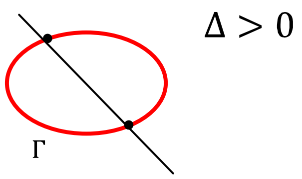
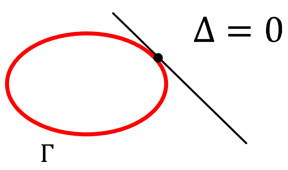
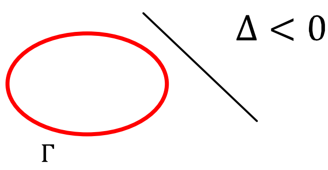
equazione	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $c \neq 0$ $ad - bc \neq 0$
coordinate di O'	$O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$
equazione degli asintoti	$x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$

Geometria analitica in sintesi

iperbole traslata		
l'iperbole si dice traslata se gli assi del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani		
	$O(\alpha,\beta)$	coordinate del centro dell'iperbole
	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse X riferita al sistema XOY

proprietà comuni a tutte le coniche

condizione di appartenenza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ ad una retta r o ad una conica Γ	
per stabilire se un dato punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene ad una retta r oppure ad una conica Γ:	• si sostituiscono le coordinate di P_0, x_0 e y_0, in **r** o in **Γ** • si sviluppano i calcoli. Se si ottiene un'identità, il punto P_0 appartiene alla retta o alla conica

posizione di una retta rispetto ad una conica Γ		
		
retta secante	retta tangente	retta esterna

per stabilire se una retta è secante, tangente o esterna ad una conica Γ bisogna:

- ricavare la y dell'equazione della retta e sostituirla nell'equazione della conica
- sviluppare i calcoli ed ordinare l'equazione rispetto alla x
- dell'equazione di II grado così ottenuta calcolare il $\Delta = b^2 - 4ac$ oppure, se b è pari, il $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$
- verificare il segno del Δ
- se $\Delta > 0$ la retta è **secante** alla conica. Si hanno 2 intersezioni reali e distinte cioè **2 punti in comune**
  se $\Delta = 0$ la retta è **tangente** alla conica. Si hanno 2 intersezioni reali e coincidenti cioè **1 punto in comune**
  se $\Delta < 0$ la retta è **esterna** alla conica. Non si ha nessuna intersezione reale cioè **nessun punto in comune**

ricerca delle equazioni delle rette tangenti ad una conica	
tangenti da un punto esterno $P_0(x_0, y_0)$	tangenti parallele ad una retta di coefficiente angolare m
• si scrive l'equazione del fascio di rette *proprio* di centro $P_0(x_0, y_0)$: $\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$ • si ricava la y dall'equazione del fascio di rette	• si scrive l'equazione del fascio di rette *improprio* con $\boldsymbol{m}$ assegnato: $\boldsymbol{y = mx + q}$
• si sostituisce la y trovata nell'equazione della conica	• si sostituisce la y trovata nell'equazione della conica
• si sviluppano i calcoli e si ordina rispetto alla x ottenendo un'equazione di II grado in x	• si sviluppano i calcoli e si ordina rispetto alla x ottenendo un'equazione di II grado in x
• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0: $\boldsymbol{\Delta = 0}$ ottenendo una equazione di II grado nell'incognita $\boldsymbol{m}$	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0: $\boldsymbol{\Delta = 0}$ ottenendo una equazione nell'incognita $\boldsymbol{q}$
• si risolve l'equazione in m ottenendo $\boldsymbol{m_1}$ ed $\boldsymbol{m_2}$	• si risolve l'equazione in q ottenendo $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$
• si sostituiscono uno alla volta i valori m_1 ed m_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle due rette tangenti	• si sostituiscono uno alla volta i valori q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle due rette tangenti