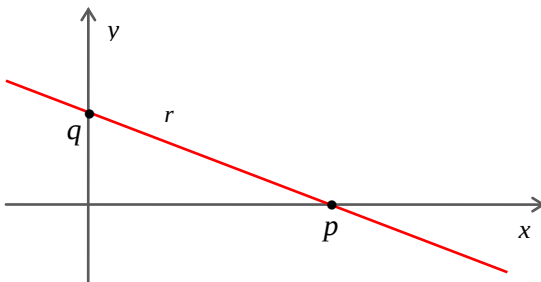


Geometria analitica: la retta

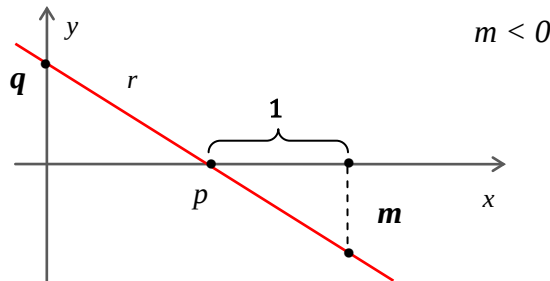
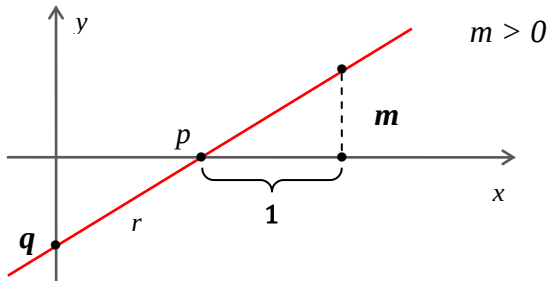
equazione della retta

	$ax + by + c = 0$	forma implicita
	$y = mx + q$	$m = -\frac{a}{b}$ $q = -\frac{c}{b}$ forma esplicita
	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$	forma segmentaria
<i>assioma:</i> la retta è costituita da infiniti punti del piano		

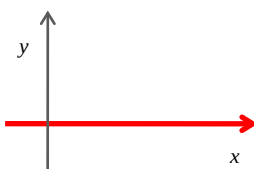
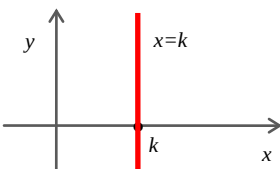
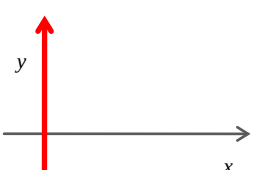
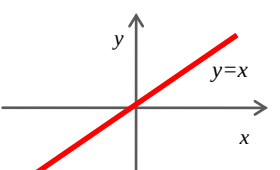
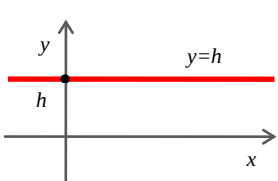
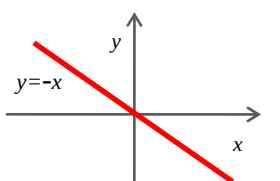
nell'equazione della retta r

in forma esplicita: m è detto coefficiente angolare q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y	in forma segmentaria: p è il punto di intersezione tra la retta e l'asse x q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y
--	--

significato geometrico di m e di q

 $m < 0$	 $m > 0$
 il coefficiente angolare m è l'ordinata del punto che ha distanza di 1 unità dal punto di intersezione di r con l'asse x	

rette particolari

	equazione asse x		equazione retta parallela all'asse y
	$y = 0$		$x = k$
	equazione asse y		equazione della bisettrice del I e III quadrante
	$x = 0$		$y = x$
	equazione retta parallela all'asse x		equazione della bisettrice del II e IV quadrante
	$y = h$		$y = -x$

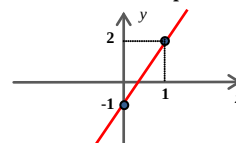
Per disegnare una retta basta trovare due punti e congiungerli.

Le coordinate di un punto si trovano assegnando alla x un valore a piacere e calcolando la corrispondente y .



assegnata la retta $y = 3x - 1$

x	y
0	-1
1	2



Geometria analitica: la retta

ricerca dell'equazione di una retta

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

equazione della retta
passante per due punti $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

equazione della retta
noto un punto $P_0(x_0, y_0)$ ed il coefficiente angolare m
equazione del fascio di rette

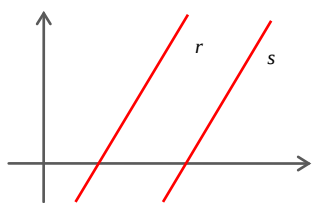
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

coefficiente angolare della retta
passante per due punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

per trovare l'equazione di una retta passante per due punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ si può anche:

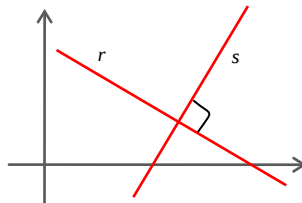
- ☀ calcolare il coefficiente angolare m_{AB}
- utilizzare la formula dell'equazione del fascio di rette sostituendo ad m il valore m_{AB} ed a x_0, y_0 le coordinate di A o di B

condizione di parallelismo e perpendicolarità tra due rette



$$m_r = m_s$$

due rette parallele hanno i coefficienti angolari uguali



$$m_r = -1/m_s$$

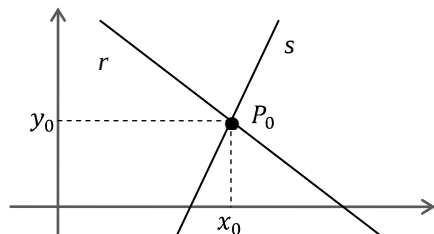
oppure

$$m_r \cdot m_s = -1$$

due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari antireciproci

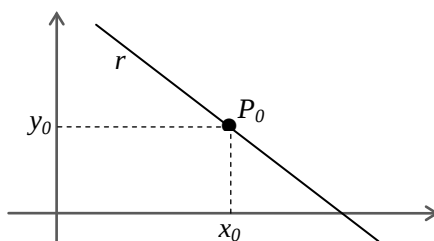
punto e retta

ricerca del punto P_0 di intersezione di due rette non parallele



- si mettono a sistema le equazioni delle due rette
- le soluzioni x_0, y_0 del sistema rappresentano le coordinate del punto di intersezione P_0

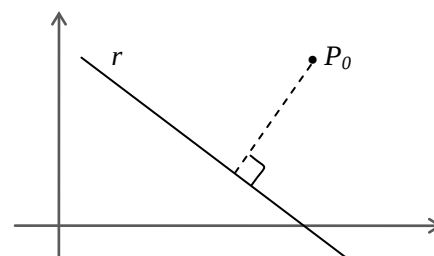
condizione di appartenenza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ ad una retta



per verificare se un punto P_0 appartiene ad una retta r :

- si sostituiscono le coordinate x_0, y_0 del punto alla x e alla y nell'equazione della retta
- si sviluppano i calcoli
- se si ottiene una identità, il punto appartiene alla retta

distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ da una retta r



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

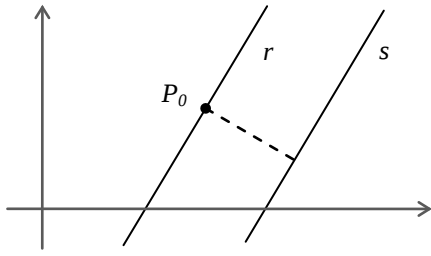
formula con l'equazione della
retta in forma implicita
 $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

formula con l'equazione della
retta in forma esplicita
 $y = mx + q$

Geometria analitica: la retta

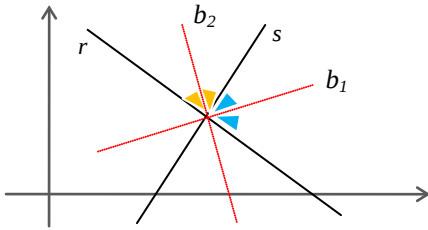
distanza tra due rette parallele r ed s



per trovare la distanza di due rette parallele :

- si ricavano le coordinate di un punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ appartenente ad una delle due rette
- si applica la formula della distanza del punto trovato dall'altra retta

equazione delle bisettrici degli angoli formati da due rette r ed s (non parallele)



note le equazioni delle rette r ed s in forma implicita

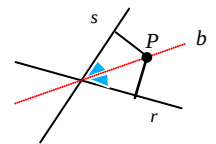
$$r: a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{ed} \quad s: a_2x + b_2y + c_2$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

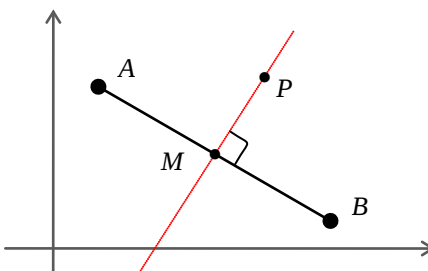
qualunque siano gli angoli formati dalle due rette, le bisettrici sono sempre perpendicolari tra loro



ricorda che la bisettrice di un angolo è definita come l'insieme dei punti equidistanti dai lati. Sfruttando la definizione si può trovare l'equazione delle bisettrici ponendo $P_r = P_s$. Calcolando le distanze e sviluppando i calcoli si ottengono le equazioni delle bisettrici.



equazione dell'asse di un segmento AB

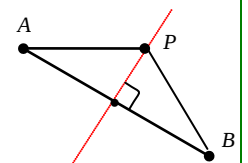


noti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

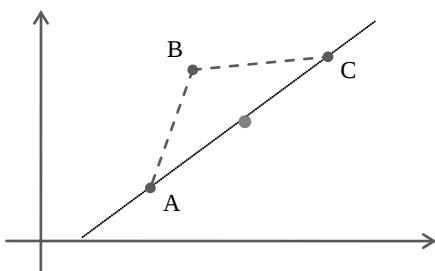
- si calcola il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento AB
- si calcola il coefficiente angolare m_{AB} del segmento AB
- si ricava il coefficiente angolare dell'asse (è perpendicolare ad AB) $m_{ASSE} = -1/m_{AB}$
- nell'equazione del fascio $y - y_0 = m(x - x_0)$, si sostituisce ad m il valore m_{ASSE} e alle coordinate x_0, y_0 quelle del punto medio x_M, y_M ottenendo l'equazione dell'asse



ricorda che l'asse di un segmento è definito come il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi. Sfruttando la definizione si può trovare l'equazione dell'asse ponendo $PA = PB$. Calcolando le distanze e sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione dell'asse del segmento



allineamento di tre punti A, B, C



per verificare se tre punti A, B, C sono allineati si può:

- ricavare m_{AB} ed m_{BC} , e verificare che $m_{AB} = m_{BC}$
- trovare l'equazione della retta passante per A e C e verificare che B appartiene alla retta
- calcolare l'area del triangolo di vertici ABC e verificare che è uguale a zero
- trovare le equazioni delle rette passanti per A e B e per A e C , e verificare che queste sono uguali
- trovare l'equazione della retta passante per A e C e verificare che la distanza di B da tale retta è zero
- verificare che la somma delle distanze AB e BC è uguale alla distanza AC cioè $AB + BC = AC$

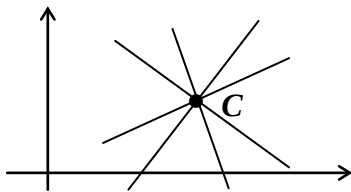
Geometria analitica: la retta

fasci di rette

Un *fascio di rette* è l'insieme delle rette aventi in comune un **punto** oppure una **direzione**

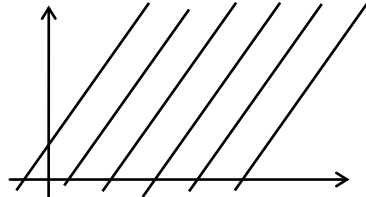
tipi di fasci

fascio proprio



è l'insieme delle rette del piano passanti per uno stesso punto $C(x_0, y_0)$ detto *centro del fascio*

fascio improprio



è l'insieme delle rette del piano aventi una direzione comune, cioè con lo stesso coefficiente angolare

come si presenta l'equazione di un fascio

l'equazione è quella di una retta (generalmente in forma implicita) nella quale compare, oltre alle incognite x ed y , anche un'altra lettera ($k, h, t, m, p \dots$) detta *parametro*

Esempio: $2kx - (3k - 1)y = 0$ $3(2t - 1)x + (2t - 1)y + 3t - 5 = 0$

classificazione di un fascio di rette

data l'equazione per classificare il tipo di fascio:

- si calcola il coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$

- se m contiene il parametro k il fascio è proprio
- se il parametro si semplifica, il fascio è improprio

esempio per un fascio di rette proprio

$$2kx - (3k - 1)y = 0 \rightarrow m = \frac{2k}{(3k - 1)}$$

esempio per un fascio di rette improprio

$$3(2k - 1)x + (2k - 1)y + 3 = 0 \rightarrow m = -3 \frac{(2k - 1)}{(2k - 1)} = -3$$

rette generatrici di un fascio

- le rette generatrici di un fascio sono due e sono quelle che hanno generato il fascio
- nel caso del fascio proprio le rette generatrici sono *incidenti*
- nel caso del fascio improprio le rette generatrici sono *parallele*

ricerca delle equazioni delle rette generatrici di un fascio

$$(3k + 1)x - (k - 1)y - 5k - 3 = 0$$

$$k(3x - y - 5) + x + y - 3 = 0$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$ $\underbrace{\hspace{2cm}}$
retta all'infinito retta con $k=0$

- dato il fascio di rette, si sviluppano i calcoli

- si raccoglie a fattor comune il parametro k

- le due parti così ottenute sono le equazioni delle rette generatrici del fascio

ricerca del centro $C(x_0, y_0)$ del fascio proprio di rette

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases} \rightarrow x_0, y_0 \rightarrow C(x_0, y_0)$$

- si mettono a sistema le equazioni delle due rette generatrici o di due generiche rette del fascio
- la soluzione del sistema rappresenta le coordinate del centro del fascio $C(x_0, y_0)$

come scrivere l'equazione di un fascio di rette

$$kr + s = 0$$

equazione del **fascio** di rette date le due **rette generatrici** r ed s

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

equazione del fascio di rette **proprio** noto il **centro** $C(x_0, y_0)$

$$y = mx + q$$

equazione del fascio di rette **improprio** noto il **coefficiente angolare** m