Divisione di due polinomi

premessa

Assegnato un polinomio dividendo $P(x)$ di grado n ed un polinomio divisore $S(x)$ di grado m con $n \geq m$, dividere $P(x)$ per $S(x)$ vuol dire trovare il polinomio quoziente $Q(x)$, di grado $m - n$, e il polinomio resto $R(x)$, di grado minore di m, per i quali risulta:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

cioè: DIVIDENDO = DIVISORE · QUOZIENTE + RESTO

Il polinomio quoziente e il polinomio resto sono unici.
Se $R(x) = 0$ il polinomio $P(x)$ si dice *divisibile* per il polinomio $S(x)$ e la divisione si dice *esatta*

Vediamo in dettaglio, con i seguenti esempi, come si trovano i polinomi quoziente e resto

esempi

1. Eseguiamo la seguente divisione: $\boldsymbol{(x - 3x^2 + 3x^5 + 5) : (1 + x^2 - x)}$

$(3x^5 - 3x^2 + x + 5) : (x^2 - x + 1)$	si ordinano, se necessario, i polinomi secondo le potenze decrescenti della x
$(3x^5 + \mathbf{0}x^4 + \mathbf{0}x^3 - 3x^2 + x + 5)$	si completa, se necessario, il polinomio dividendo con gli eventuali termini mancanti
$\begin{array}{l\|l} 3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$	si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$\begin{array}{l\|l} 3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} & \mathbf{3x^3} \end{array}$	si divide il primo termine $(3x^5)$ del polinomio dividendo per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $\mathbf{3x^3}$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{l\|l} 3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3} \end{array}$	si moltiplica il monomio trovato $(3x^3)$ per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, **cambiato di segno**, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{l\|l} 3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3} \\ \cline{1-1} 0 \quad 3x^4-3x^3 \quad -3x^2+x+5 & \end{array}$	si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$\begin{array}{l\|l} 3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2} \\ \cline{1-1} \quad 3x^4-3x^3 \quad -3x^2+x+5 & \end{array}$	si divide il primo termine $(3x^4)$ del polinomio ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $\mathbf{3x^2}$ nello spazio in basso a destra

Divisione di due polinomi

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2} \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-3x^2+x+5 & \\
-3x^4+3x^3-3x^2 &
\end{array}
$$

si moltiplica il monomio trovato $(3x^2)$ per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, **cambiato di segno**, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2} \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-3x^2+x+5 & \\
-3x^4+3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 \quad -6x^2+x+5 &
\end{array}
$$

si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.

Poiché il grado del resto parziale ottenuto è uguale a quello del polinomio divisore, si procede ulteriormente con la divisione

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2-6} \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-3x^2+x+5 & \\
-3x^4+3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
-6x^2+x+5 &
\end{array}
$$

si divide il primo termine $(-6x^2)$ del polinomio ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $\mathbf{-6}$ nello spazio in basso a destra

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2-6} \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-3x^2+x+5 & \\
-3x^4+3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
-6x^2+x+5 & \\
+6x^2-6x+6 &
\end{array}
$$

si moltiplica il monomio trovato (-6) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, **cambiato di segno**, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4+0x^3-3x^2+x+5 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^5+3x^4-3x^3 & \mathbf{3x^3+3x^2-6} \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-3x^2+x+5 & \\
-3x^4+3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
-6x^2+x+5 & \\
+6x^2-6x+6 & \\ \cline{1-1}
0 \quad -5x+11 &
\end{array}
$$

si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.

Poiché il grado del resto ottenuto è inferiore a quello del polinomio divisore la divisione finisce

Per definizione di divisione si ha:

DIVIDENDO = QUOZIENTE · DIVISORE + RESTO

$$\mathbf{(3x^5-3x^2+x+5)=(3x^3+3x^2-6)\cdot(x^2-x+1)+(5x+11)}$$

Divisione di due polinomi

2.	Eseguiamo la seguente divisione: $\mathbf{(8x + 2x^3 - 7x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1)}$
$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$	si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della x. Si controlla che il polinomio dividendo sia completo
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$	si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} & \mathbf{2x} \end{array}$	si divide il primo termine $(2x^3)$ del polinomio dividendo per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $\mathbf{2x}$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 2x & \mathbf{2x} \end{array}$	si moltiplica il monomio trovato $(2x)$ per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 2x & \mathbf{2x} \\ \cline{1-1} 0 \quad -3x^2 + 6x - 3 & \end{array}$	si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 2x & \mathbf{2x - 3} \\ \cline{1-1} -3x^2 + 6x - 3 & \end{array}$	si divide il primo termine $(-3x^2)$ del polinomio dividendo ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $\mathbf{-3}$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 2x & \mathbf{2x - 3} \\ \cline{1-1} -3x^2 + 6x - 3 & \\ +3x^2 - 6x + 3 & \end{array}$	si moltiplica il monomio trovato (-3) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r\|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 2x & \mathbf{2x - 3} \\ \cline{1-1} -3x^2 + 6x - 3 & \\ +3x^2 - 6x + 3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$	si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Si osserva che, in questo caso, il polinomio resto è zero

Per definizione di divisione si ha:

DIVIDENDO = QUOZIENTE · DIVISORE

$$\mathbf{(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)}$$