

# Divisione di due polinomi

## premessa

Assegnati un polinomio dividendo  $P(x)$  di grado  $n$  e un polinomio divisore  $S(x)$  di grado  $m$  con  $n \geq m$ , dividere  $P(x)$  per  $S(x)$  vuol dire trovare il polinomio quoziente  $Q(x)$ , di grado  $n - m$ , e il polinomio resto  $R(x)$ , di grado minore di  $m$  oppure di grado nullo, per i quali risulta:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

cioè:  $\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \cdot \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$

Il polinomio quoziente e il polinomio resto sono unici.

Se  $R(x) = 0$  il polinomio  $P(x)$  si dice *divisibile* per il polinomio  $S(x)$  e la divisione si dice *esatta*

Vediamo in dettaglio, con i seguenti esempi, come si trovano i polinomi quoziente e resto

## esempi

1.	Eseguiamo la seguente divisione:	$(x - 3x^2 + 3x^5 + 5) : (1 + x^2 - x)$
	$(3x^5 - 3x^2 + x + 5) : (x^2 - x + 1)$	si ordinano, se necessario, i polinomi secondo le potenze decrescenti della $x$
	$(3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5)$	si completano, se necessario, i polinomi dividendo e divisore con gli eventuali termini mancanti
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ \hline & \end{array}$	si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ & \underline{3x^3} \\ \hline & \end{array}$	si divide il primo termine ( $3x^5$ ) del polinomio dividendo per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $3x^3$ nello spazio in basso a destra
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3} \\ \hline & \end{array}$	si moltiplica il monomio trovato ( $3x^3$ ) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, <b>cambiato di segno</b> , a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3} \\ \hline 0 & 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{array}$	si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3 + 3x^2} \\ \hline & 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{array}$	si divide il primo termine ( $3x^4$ ) del polinomio ridotto per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $3x^2$ nello spazio in basso a destra

## Divisione di due polinomi

$  \begin{array}{r}  3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\  \hline  3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\  \hline  \phantom{3x^4} - 3x^3 - 3x^2 + x + 5  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^2 - x + 1 \\  \hline  3x^3 + 3x^2  \end{array}  $	<p>si moltiplica il monomio trovato (<math>3x^2</math>) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, <b>cambiato di segno</b>, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto</p>
$  \begin{array}{r}  3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\  \hline  3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\  \hline  0 \quad 0 \quad -6x^2 + x + 5  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^2 - x + 1 \\  \hline  3x^3 + 3x^2  \end{array}  $	<p>si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.</p> <p>Poiché il grado del resto parziale ottenuto è uguale a quello del polinomio divisore, si procede ulteriormente con la divisione</p>
$  \begin{array}{r}  3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\  \hline  3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\  \hline  \phantom{3x^4} - 6x^2 + x + 5  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^2 - x + 1 \\  \hline  3x^3 + 3x^2 - 6  \end{array}  $	<p>si divide il primo termine (<math>-6x^2</math>) del polinomio ridotto per il primo termine (<math>x^2</math>) del polinomio divisore e si scrive il risultato <b>-6</b> nello spazio in basso a destra</p>
$  \begin{array}{r}  3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\  \hline  3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\  \hline  \phantom{3x^4} - 6x^2 + x + 5 \\  + 6x^2 - 6x + 6 \\  \hline  \phantom{3x^4} \phantom{- 6x^2} + x + 11  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^2 - x + 1 \\  \hline  3x^3 + 3x^2 - 6  \end{array}  $	<p>si moltiplica il monomio trovato (<math>-6</math>) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, <b>cambiato di segno</b>, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto</p>
$  \begin{array}{r}  3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\  \hline  3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\  -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\  \hline  \phantom{3x^4} - 6x^2 + x + 5 \\  + 6x^2 - 6x + 6 \\  \hline  0 \quad -5x + 11  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^2 - x + 1 \\  \hline  3x^3 + 3x^2 - 6  \end{array}  $	<p>si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.</p> <p>Poiché il grado del resto ottenuto è inferiore a quello del polinomio divisore, la divisione finisce</p>
<p>Per definizione di divisione si ha:</p>		
<p><b>DIVIDENDO = QUOZIENTE · DIVISORE + RESTO</b></p>		
<p><b><math>(3x^5 - 3x^2 + x + 5) = (3x^3 + 3x^2 - 6) \cdot (x^2 - x + 1) + (-5x + 11)</math></b></p>		

## Divisione di due polinomi

<b>2.</b>	Eseguiamo la seguente divisione:	$(8x + 2x^3 - 7x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1)$
$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$		si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della $x$ . Si completano, se necessario, i due polinomi
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ \hline x^2 - 2x + 1 \end{array}$		si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si divide il primo termine ( $2x^3$ ) del polinomio dividendo per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $2x$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato ( $2x$ ) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline 0 \quad -3x^2 + 6x - 3 \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \end{array}$		si divide il primo termine ( $-3x^2$ ) del polinomio dividendo ridotto per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $-3$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \\ +3x^2 - 6x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato ( $-3$ ) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \\ +3x^2 - 6x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Si osserva che, in questo caso, il polinomio resto è zero
Per definizione di divisione si ha:		
$\text{DIVIDENDO} = \text{QUOZIENTE} \cdot \text{DIVISORE}$		
$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$		

## Divisione di due polinomi

<b>3.</b>	Eseguiamo la seguente divisione:	$(2x + 2x^3 - 3x^2 - 3) : (x^2 + 1)$
$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 0x + 1)$		si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della $x$ . Si completano, se necessario, i due polinomi
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^2 + 0x + 1 \end{array}$		si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si divide il primo termine ( $2x^3$ ) del polinomio dividendo per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $2x$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 2x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato ( $2x$ ) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline 0 - 3x^2 + 0x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si divide il primo termine ( $-3x^2$ ) del polinomio dividendo ridotto per il primo termine ( $x^2$ ) del polinomio divisore e si scrive il risultato $-3$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 + 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \\ +3x^2 - 0x + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato ( $-3$ ) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \\ +3x^2 - 0x + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Si osserva che, in questo caso, il polinomio resto è zero
Per definizione di divisione si ha:		
$\text{DIVIDENDO} = \text{QUOZIENTE} \cdot \text{DIVISORE}$		
$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) = (2x - 3) \cdot (x^2 + 1)$		