Calcolo combinatorio

premessa

il calcolo combinatorio studia i *raggruppamenti* che si possono ottenere con un dato numero $\boldsymbol{n}$ di oggetti disposti su un dato numero $\boldsymbol{k}$ di posti.

I raggruppamenti si possono formare *senza* ripetizioni o *con* ripetizioni degli n oggetti.

Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli n oggetti sono i 7 alunni, il numero k di posti sono le 5 sedie e non c'è ripetizione di oggetti poiché gli alunni sono tutti diversi.

Ancora, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi si possono collocare 10 palline di cui 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi, in 3 scatole, gli n oggetti sono le 10 palline, il numero k di posti sono le 3 scatole e c'è ripetizione di oggetti poiché di palline ce ne sono 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi.

Esistono tre raggruppamenti possibili.

- **PERMUTAZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **uguale** al numero di posti e **conta l'ordine** con cui si dispongono. Le permutazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

- **DISPOSIZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **conta l'ordine** con cui si dispongono. Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

- **COMBINAZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **non conta l'ordine** con cui si dispongono. Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

Vediamo le formule risolutive di ogni caso nella seguente tabella

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione $\boldsymbol{r}$ di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{P_n = n!}$	$\boldsymbol{P^r_n = \dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}}$
Disposizioni • $n \neq k$ • $conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ $\quad n > k$	$\boldsymbol{D^r_{n,k} = n^k}$
Combinazioni • $n \neq k$ • $non\ conta\ l'ordine$	$\boldsymbol{C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$ $\quad n > k$	$\boldsymbol{C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}}$

Calcolo combinatorio

esempi

permutazioni senza ripetizione di oggetti

Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola LIBRO?

$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola LIBRO
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola LIBRO
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
senza ripetizione	le 5 lettere sono tutte distinte quindi non c'è ripetizione di oggetti
$P_n = n!$	si applica la formula delle permutazioni senza ripetizioni di oggetti
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	ci sono 120 parole che si possono formare con le lettere della parola LIBRO

permutazioni con ripetizione di oggetti

Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola MAMMA?

$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola MAMMA
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola MAMMA
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
$r_1 = 3 \;\; e \;\; r_2 = 2$	le 5 lettere non sono tutte distinte: M si ripete 3 volte ed A si ripete 2 volte
$P_n^r = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$	si applica la formula delle permutazioni con ripetizioni di oggetti
$P_5^r = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{120}{6 \cdot 2} = 10$	ci sono 10 parole che si possono formare con le lettere della parola MAMMA

disposizioni senza ripetizioni

In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?

$n = 5$	gli oggetti sono i 5 alunni
$k = 3$	i posti sono le 3 sedie
conta l'ordine	le sedie sono numerate, quindi conta l'ordine con cui gli alunni si siedono
senza ripetizione	i 5 alunni sono persone tutte distinte, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	si applica la formula delle disposizioni senza ripetizioni di oggetti
$D_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{120}{2} = 60$	ci sono 60 modi diversi in cui gli alunni si possono sedere

Calcolo combinatorio

disposizioni con ripetizioni	
Utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare?	
$n = 3$	gli oggetti sono le 3 cifre
$k = 4$	i posti sono le 4 cifre
conta l'ordine	le cifre hanno posizioni ben precise, quindi conta l'ordine con cui i numeri 1,2,3 si dispongono
$r = 4$	ciascuna cifra (1,2,3) può ripetersi fino a 4 volte per formare il numero a 4 cifre, quindi c'è ripetizione di oggetti
$D_{n,k}^{r} = n^{k}$	si applica la formula delle disposizioni con ripetizioni di oggetti
$D_{3,4}^{r} = 3^{4} = 81$	si possono formare 81 numeri di 4 cifre usando le cifre 1, 2, 3

combinazioni senza ripetizioni	
Un negoziante vuole esporre in una piccola vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?	
$n = 10$	gli oggetti sono i 10 modelli di scarpe
$k = 4$	i posti sono le 4 paia di scarpe da esporre
non conta l'ordine	per l'esposizione non conta l'ordine
senza ripetizione	i modelli sono tutti distinti, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	si applica la formula delle combinazioni senza ripetizioni di oggetti
$C_{10,4} = \dfrac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$	ci sono 210 modi diversi per esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi

combinazioni con ripetizioni	
Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco ed il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?	
$n = 2$	gli oggetti sono i 2 colori
$k = 5$	i posti sono le 5 gocce che vanno prese di volta in volta
non conta l'ordine	per la composizione del nuovo colore non conta l'ordine
con ripetizione	per ogni colore si hanno a disposizione 5 gocce
$C_{n,k}^{r} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$	si applica la formula delle combinazioni con ripetizioni di oggetti
$C_{2,5}^{r} = \dfrac{(2+5-1)!}{5!\cdot(2-1)!} = \dfrac{6!}{5!\cdot 1!} = 6$	si possono formare solo 6 colori diversi: uno è il bianco (5 gocce bianche), uno è il nero (5 gocce nere) e poi ci sono 4 sfumature di grigio
⚠ Nelle combinazioni con ripetizione bisogna stare attenti ad individuare correttamente quali sono gli oggetti e quali sono i posti.	