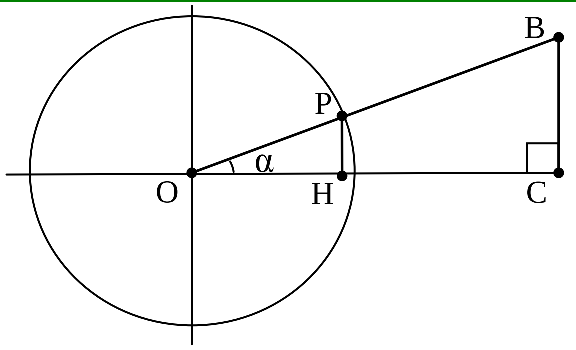
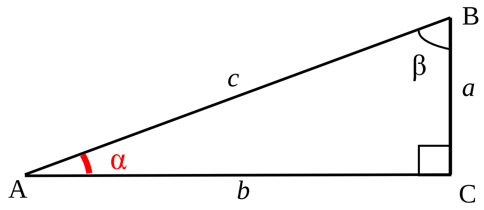
Teoremi sui triangoli rettangoli

dalla similitudine dei triangoli rettangoli OHP e OCB si ha:



$$sen\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{BC}{OB} = \frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{ipotenusa}$$

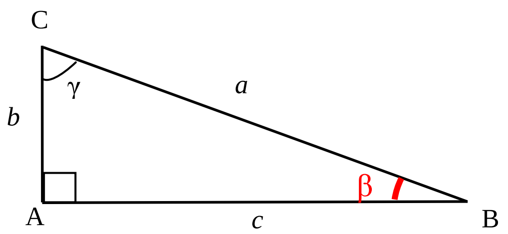
$$cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OC}{OB} = \frac{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}{ipotenusa}$$



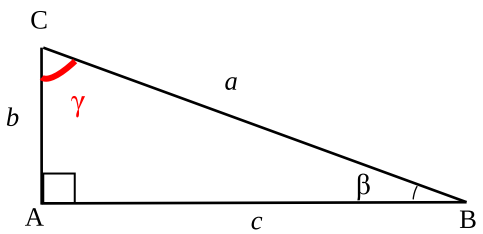
$$sen\alpha = \frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{ipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}{ipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$sen\alpha = \frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{ipotenusa}$	$\rightarrow$	$cateto = ipotenusa \cdot sen\alpha$ (angolo opposto al cateto)
$cos\alpha = \frac{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}{ipotenusa}$	$\rightarrow$	$cateto = ipotenusa \cdot cos\alpha$ (angolo adiacente al cateto)
$tg\alpha = \frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}$	$\rightarrow$	$cateto = altro\ cateto \cdot tg\alpha$ (angolo opposto al cateto)
$ctg\alpha = \frac{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}$	$\rightarrow$	$cateto = altro\ cateto \cdot ctg\alpha$ (angolo adiacente al cateto)



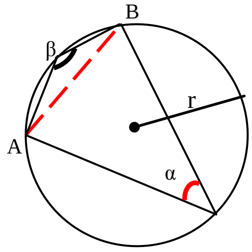
$sen\beta = \frac{b}{a}$	$\rightarrow$	$b = a \cdot sen\beta$	e	$a = \frac{b}{sen\beta}$
$cos\beta = \frac{c}{a}$	$\rightarrow$	$c = a \cdot cos\beta$	e	$a = \frac{c}{cos\beta}$
$tg\beta = \frac{b}{c}$	$\rightarrow$	$b = c \cdot tg\beta$	e	$c = \frac{b}{tg\beta}$
$ctg\beta = \frac{c}{b}$	$\rightarrow$	$c = b \cdot ctg\beta$	e	$b = \frac{c}{ctg\beta}$



$sen\gamma = \frac{c}{a}$	$\rightarrow$	$c = a \cdot sen\gamma$	e	$a = \frac{c}{sen\gamma}$
$cos\gamma = \frac{b}{a}$	$\rightarrow$	$b = a \cdot cos\gamma$	e	$a = \frac{b}{cos\gamma}$
$tg\gamma = \frac{c}{b}$	$\rightarrow$	$c = b \cdot tg\gamma$	e	$b = \frac{c}{tg\gamma}$
$ctg\gamma = \frac{b}{c}$	$\rightarrow$	$b = c \cdot ctg\gamma$	e	$c = \frac{b}{ctg\gamma}$

Teoremi sui triangoli qualsiasi

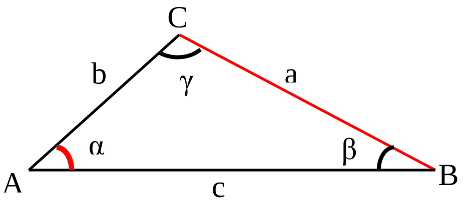
teorema della corda



la misura di una corda è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda:

$\overline{AB} = 2\,r\,sen\alpha$ oppure $\overline{AB} = 2\,r\,sen\beta$

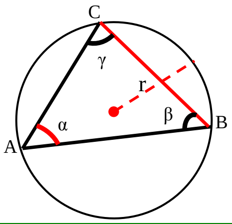
teorema dei seni o di Eulero



in un triangolo il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto è costante:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

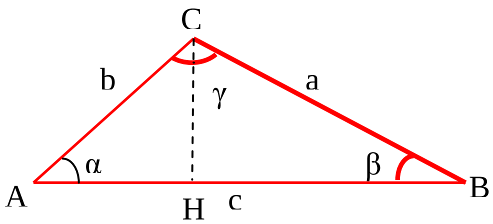
corollari



per il teorema della corda, detto r il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo, il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale a 2r:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r$$

teorema delle proiezioni

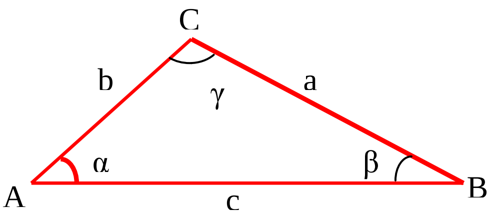


in un triangolo la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti di quelle degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di questi forma con il primo:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

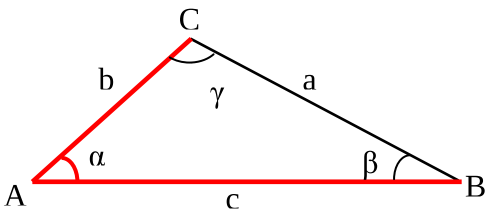
teorema del coseno o di Carnot



in un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, meno il doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

area di un triangolo



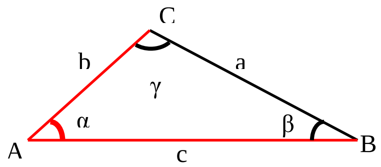
L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} b\,c\,sen\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a\,c\,sen\beta$$
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a\,b\,sen\gamma$$

Formule di Trigonometria

formule di Briggs



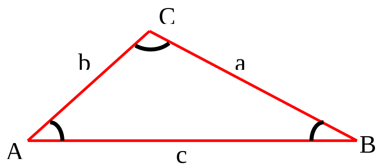
dato un triangolo qualsiasi di cui siano note le misure dei lati e il semiperimetro p, i seni delle semiampiezze degli angoli sono espresse dalle seguenti relazioni:

$$sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$sen\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \qquad cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad ctg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}$$

$$sen\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad ctg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

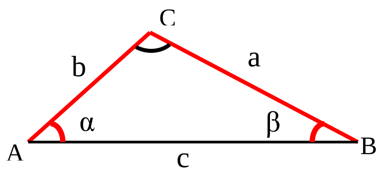
formula di Erone



l'area di un triangolo qualsiasi si esprime in funzione del semiperimetro p come:

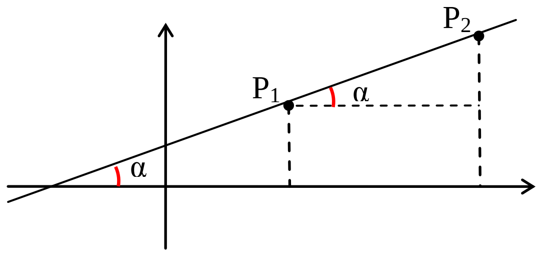
$$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

teorema delle tangenti o di Nepero



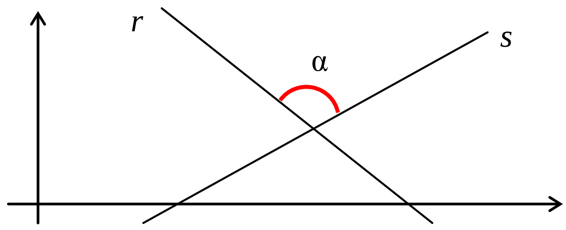
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

applicazioni della trigonometria alla geometria analitica



significato trigonometrico del coefficiente angolare m di una retta y=mx+q

$$m=tg\alpha$$

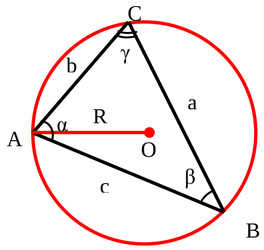


tangente dell'angolo formato da due rette r ed s di coefficiente angolare m_r ed m_s

$$tg\alpha=\frac{m_r-m_s}{1+m_r m_s}$$

Formule di Trigonometria

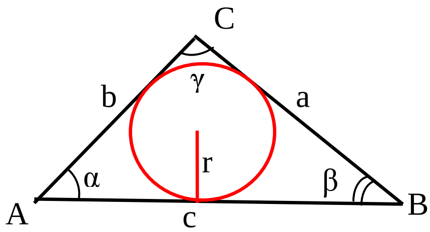
applicazioni della trigonometria alla geometria



raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo

$$R = \frac{a}{2sen\alpha} = \frac{b}{2sen\beta} = \frac{c}{2sen\gamma}$$

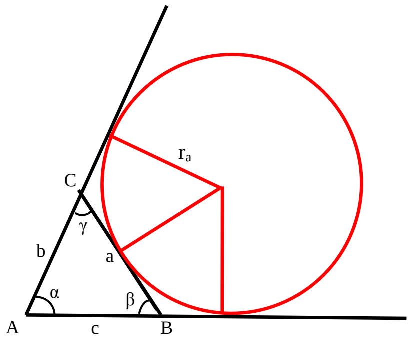
oppure $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$ $\qquad \mathcal{A}$ = area



raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = (p-a)tg\frac{\alpha}{2} = (p-b)tg\frac{\beta}{2} = (p-c)tg\frac{\gamma}{2}$$

oppure $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$ $\qquad \mathcal{A}$ = area p = semiperimetro



raggio della circonferenze ex-inscritte

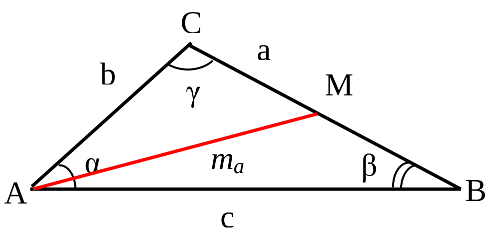
(cioè tangente a un suo lato e ai prolungamenti degli altri due)

$r_a = p\ tg\frac{\alpha}{2}$ oppure $r_a = \frac{\mathcal{A}}{p-a}$

$r_b = p\ tg\frac{\beta}{2}$ oppure $r_b = \frac{\mathcal{A}}{p-b}$

$r_c = p\ tg\frac{\gamma}{2}$ oppure $r_c = \frac{\mathcal{A}}{p-c}$

$\mathcal{A}$ = area p = semiperimetro

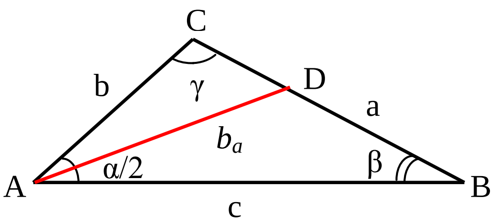


mediane di un triangolo

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



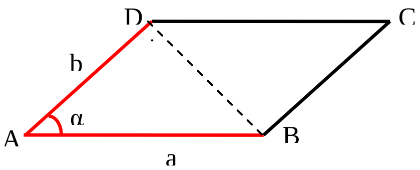
bisettrici di un triangolo

$$b_\alpha = \frac{2bc\ \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$b_\beta = \frac{2ac\ \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

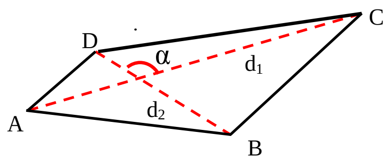
$$b_\gamma = \frac{2ab\ \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

area di un parallelogramma



$$\mathcal{A} = ab\ sen\alpha$$

area di un quadrilatero



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, d_1 d_2\ sen\alpha$$