

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale

premessa

Un numero naturale elevato al quadrato contiene nella scomposizione un numero **pari** di 2 o nessun 2.
Ad esempio:

1. consideriamo il numero naturale 9 ed eleviamolo al quadrato	$(9)^2 = 81$
scomponiamo il numero 81 Il quadrato di 9 non contiene nessun 2	$81 = 3^4$
2. consideriamo il numero naturale 6 ed eleviamolo al quadrato	$(6)^2 = 36$
scomponiamo il numero 36 Il quadrato di 6 contiene un numero pari di 2	$36 = 2^2 \cdot 3^2$
3. consideriamo il numero naturale 8 ed eleviamolo al quadrato	$(8)^2 = 64$
scomponiamo il numero 64 Il quadrato di 8 contiene un numero pari di 2	$64 = 2^6$

enunciato

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè $\sqrt{2}$ non si può esprimere come rapporto tra due numeri naturali m ed n

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

dimostrazione

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$	ragioniamo per assurdo negando la tesi, cioè supponiamo che esistono due numeri naturali m ed n tali che $\sqrt{2}$ si può esprimere come rapporto tra loro
$2 = \frac{m^2}{n^2}$	eleviamo al quadrato primo e secondo membro
$2 n^2 = m^2$	moltiplicando primo e secondo membro per n^2 Si ottiene una uguaglianza impossibile
$2 n^2$ contiene un numero dispari di 2	infatti il primo membro ($2 n^2$) contiene un numero dispari di 2, cioè contiene il 2 e un n^2 che, per quanto detto nella premessa, contiene un numero pari di 2
m^2 contiene un numero pari di 2	il secondo membro (m^2) contiene, per quanto detto nella premessa, un numero pari di 2
numero dispari di 2 = numero pari di 2	negando la tesi si arriva all'assurdo che al primo membro dell'uguaglianza si ha un numero dispari di 2 e al secondo membro un numero pari di 2 e quindi la tesi non può essere negata
$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ quindi $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale	per il principio del terzo escluso, non potendo negare la tesi, vuol dire che essa è vera, cioè: