

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico
Sessione ordinaria 2005
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1.

Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC e contiene il centro della circonferenza k circoscritta ad esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.

- a) Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.
b) Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento AE, rispetto ad

un'assegnata unità di misura, siano $\frac{5}{4}$ e 2, riferire il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC. Trovare:

1. le coordinate dei punti B, C, D;
 2. l'equazione della circonferenza k;
 3. l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.
- c) Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

PROBLEMA 2.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^4 + ax^2 + b,$$

dove a e b sono parametri reali.

- a) Determinare a quali condizioni devono soddisfare tali parametri affinché la corrispondente curva sia situata nel semipiano $y \geq 0$.
- b) Esistono valori di a e b tali che la curva corrispondente sia situata nel semipiano $y < 0$?
- c) Tra le curve assegnate indicare con K quella che ha un minimo relativo uguale a 0 ed un massimo relativo uguale ad 1.
- d) Controllato che la curva K si ottiene per $a = -2$ e $b = 1$, disegnarla.
- e) Calcolare infine le aree delle regioni in cui la curva K divide il cerchio di centro O e raggio 1.

QUESTIONARIO.

1. Nello spazio si considerino tre rette a , b , c , comunque scelte ma alle seguenti condizioni: la retta a è strettamente parallela alla retta b e la retta b è strettamente parallela alla retta c . Si può concludere che le rette a , c non hanno punti in comune? Fornire una esauriente motivazione della risposta.
2. Un piano g interseca i due piani a e b , paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette a e b . Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette? Fornire esaurienti spiegazioni della risposta.
3. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x , della funzione 2^x è $2^x \ln 2$, esplicitando ciò che si ammette.

4. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^7$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b , sono rispettivamente:

$$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

5. In una fabbrica lavorano 35 operai e 25 operaie. Si deve formare una delegazione comprendente 3 operai e 2 operaie. Quante sono le possibili delegazioni?

6. Calcolare il limite della funzione $\frac{2x - \sin 3x}{3x + \cos 2x}$ per x tendente a $+\infty$. È vero o falso che si può ricorrere al teorema di De L'Hôpital? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare, se esiste, la funzione $f(x)$ tale che $\int_0^t f(x) dx = t^2 + \sqrt{t}$.

Durata della prova: 6 ore.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.