Problemi di geometria

sui punti notevoli di un triangolo

1	Dimostra che se l'incentro e il circocentro di un triangolo coincidono, allora il triangolo è equilatero.
2	Dato un triangolo rettangolo, dimostra che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.
3	Dimostra che in un qualsiasi triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro.
4	Dimostra che se il circocentro di un triangolo appartiene ad un lato, allora l'angolo opposto a questo lato è retto.
5	Dimostra che se un triangolo è isoscele la bisettrice dell'angolo diverso è anche mediana.
6	Dimostra che in un triangolo isoscele ABC di base AB, la bisettrice dell'angolo esterno dell'angolo al vertice $A\hat{C}B$ è parallela alla base AB.
7	Dimostra che gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo si incontrano sull'ipotenusa.
8	Sia dato un triangolo ABC e si conduca la mediana AM relativa al lato BC. Dimostra che se i triangoli AMB e ACM sono entrambi isosceli, allora il triangolo ABC è rettangolo in A.
9	Dimostra che in un triangolo equilatero la somma delle distanze di un qualsiasi punto interno dai tre lati è uguale all'altezza del triangolo.
10	Dimostra che in un triangolo rettangolo l'altezza e la mediana relativa all'ipotenusa formano un angolo che è uguale alla differenza degli angoli acuti del triangolo.
11	Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato AB e siano AH e BK le altezze relative agli altri due lati. Dimostra che il triangolo HMK è isoscele sulla base HK.
12	Sia ABC un triangolo isoscele di base BC. Traccia le semirette AB e AC a cui appartengono i lati AB e AC del triangolo e fissa su di esse rispettivamente i punti E ed F. Dimostra che la somma degli angoli esterni $E\hat{B}C$ e $F\hat{C}B$ supera di un angolo piatto l'angolo al vertice $C\hat{A}B$.
13	Dimostra che in ogni triangolo rettangolo, congiungendo il circocentro con i punti medi dei cateti e con il vertice dell'angolo retto, si ottengono quattro triangoli congruenti.
14	Se L, M e N sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CA del triangolo ABC, dimostra che il circocentro di ABC coincide con l'ortocentro di LMN.
15	Dimostra che in un quadrangolo convesso la somma delle diagonali è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.
16	Dimostra che in un triangolo ABC, rettangolo in A, la bisettrice dell'angolo retto è anche bisettrice dell'angolo formato dalla mediana e dall'altezza relativa all'ipotenusa.
17	Dato un triangolo ABC, rettangolo in A, sia AM la mediana. Dimostra che le bisettrici degli angoli $B\widehat{M}A$ e $A\widehat{M}C$ sono parallele ai lati del triangolo ABC.

Problemi di geometria

sui punti notevoli di un triangolo

18	Di un triangolo rettangolo conosci l'altezza AH relativa all'ipotenusa, il punto medio G di AH e i punti medi M e N dei cateti. Dimostra che: - l'angolo $M\hat{H}N$ è retto; - la retta MN interseca il segmento AH in G.
19	Sia ABC un triangolo isoscele di base BC. Conduci l'altezza BK relativa al lato AC e l'altezza AH relativa al lato BC. Dimostra che $C\hat{B}K$ è la metà dell'angolo al vertice $C\hat{A}B$.
20	Considera un triangolo ottusangolo ABC di ortocentro O e confronta i suoi angoli con gli angoli formati dai segmenti congiungenti i vertici del triangolo con O.
21	Sia $ABCD$ un parallelogramma e AC una sua diagonale. Dimostra che il baricentro G del triangolo ABC appartiene alla diagonale DB e la divide in due parti, l'una doppia dell'altra.
22	Sia ABC un triangolo e AH e BK le sue altezze. Dimostra che i punti A, B, H, K giacciono su una stessa circonferenza.
23	Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Indica con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa e con M e N i punti medi dei due cateti. Dimostra che i punti A, M, H, N appartengono alla stessa circonferenza.
24	Sia ABC un triangolo equilatero inscritto ad una circonferenza. Dimostra che l'altezza del triangolo è congruente a $\frac{3}{2}$ del raggio della circonferenza circoscritta.
25	Sia ABC un triangolo le bisettrici dei cui angoli esterni formano un triangolo EFG. Dimostra che le altezze di questo triangolo appartengono alle bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC.
26	Le mediane AM e BN relative ai lati BC e AC del triangolo ABC sono congruenti e si intersecano nel punto R. Dimostra che ARB è un triangolo isoscele e che il triangolo ABC è anch'esso isoscele.
27	Sia ABC un triangolo qualunque e sia O l'incentro. Conduci da O le distanze OD, OE, OF rispettivamente da BC, AC, AB. Dimostra che $AE \cong AF$; $CE \cong CD$; $BF \cong BD$.
28	Disegna un triangolo ABC e conduci dal vertice C la mediana CM indicando con BH e AK le distanze dei vertici A e B da tale retta. Dimostra che $BH \cong AK$ e che AK e BH sono parallele.
29	Data una circonferenza γ di centro O, traccia le tangenti da un punto P. Siano A e B i punti di contatto e M il punto medio del minore dei due archi AB. Dimostra che la semiretta AM è bisettrice di $P\hat{A}B$ e che la semiretta BM è la bisettrice di $A\hat{B}P$.
30	Tre semirette di origine O dividono il piano in tre angoli congruenti. Prendi su ciascuna delle semirette i segmenti OA, OB, OC congruenti fra loro. Dimostra che il triangolo ABC è equilatero e che le bisettrici, le altezze e le mediane di questo triangolo appartengono alle semirette OA, OB, OC.
31	Dato un triangolo ABC, siano M e N i punti medi, rispettivamente di AB e AC. Dimostra che il segmento MN e la mediana AP relativa al terzo lato BC si dimezzano scambievolmente.
32	Sia M il punto medio del lato BC di un parallelogramma $ABCD$ e N il punto medio del lato CD. Dimostra che i segmenti AM e AN dividono la diagonale BD in tre parti congruenti.

Problemi di geometria

sui punti notevoli di un triangolo

33	Nel triangolo ABC, con $AB>CA$, conduci la bisettrice AD dall'angolo in $\hat{A}$ e da D la semiretta DP che taglia il triangolo e forma con AD l'angolo $P\widehat{D}A \cong A\widehat{D}C$ e interseca il lato AB nel punto E. Dimostra che $DE \cong DC$ e $AE \cong CA$ e che la retta AD è asse di EC.
34	Dato un quadrilatero $ABCD$, sia $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$ e $AD \cong DC \cong CB$. Dimostra che i lati AB e DC sono paralleli.
35	Sia ABC un triangolo isoscele, di base BC; conduci dai punti B e C le perpendicolari ai lati AB e CA che si intersecano in un punto P. Dimostra che la retta AP è asse della base BC.
36	In un triangolo ABC equilatero costruisci il baricentro G. Traccia l'asse dei segmenti AG e BG e dimostra che tali assi dividono il lato AB del triangolo in tre parti congruenti.
37	Sia G il baricentro di un triangolo qualsiasi ABC e siano M e N, rispettivamente, i punti medi dei lati AC e AB. Dimostra che il quadrilatero $ANGM$ è circoscrivibile ad una circonferenza se o solo se la somma di AB e GB è congruente alla somma di AC e GC.
38	Dimostra che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei diametri della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo.
39	Esternamente ai lati di un triangolo ABC qualunque, disegna i triangoli equilateri ABE, BCF, CAG. Dimostra che i segmenti AF, BG, CE sono congruenti.
40	Sia ABC un triangolo equilatero. Disegna, esternamente ai suoi lati, tre triangoli equilateri ABE, BCF, ACD i cui baricentri sono, rispettivamente, P, Q, e R. Dimostra che $APBQCR$ è un esagono regolare e che $PQR \cong ABC$.
41	Dato un triangolo ABC e la circonferenza circoscritta ad esso, sia D il punto in cui la perpendicolare ad AB passante per A incontra tale circonferenza e sia H l'ortocentro del triangolo ABC. Dimostra che: -CH è parallela ad AD; -$B\hat{C}D$ è retto; -AH è parallela a DC; -AD ≅ CH.
42	Dimostra che le bisettrici dei quattro angoli interni determinati da due parallele tagliate da una trasversale si incontrano nei quattro vertici di un rettangolo.
43	Disegna un triangolo isoscele ABC di base BC e un punto P su BC. Conduci da P la perpendicolare a BC e indica con Q e R le sue intersezioni con le rette dei lati AB e AC. Dimostra che la somma di PQ e PR è congruente al doppio dell'altezza del triangolo.
44	Disegna un triangolo ABC e traccia dall'incentro S la parallela al lato BC che incontra i lati AB e AC rispettivamente in P e in Q. Dimostra che il perimetro del triangolo APQ è congruente a $AB+AC$.
45	Sia ABC un triangolo qualunque e sia O l'incentro. Conduci da O le distanze dai lati AB e BC, chiamate rispettivamente OH e OK. Dimostra che la somma di CA e BH è uguale alla somma di BC e AH.

Problemi di geometria

sui punti notevoli di un triangolo

46	Sia *ABCDEF* un esagono equilatero e equiangolo; dimostra che le diagonali *AC, AD, AE* dividono l'esagono in due triangoli isosceli congruenti e in due triangoli rettangoli congruenti.
47	In un triangolo *ABC,* prolunga il lato *CA* dalla parte di *A* e traccia le bisettrici dei due angoli, interno e esterno, di vertice *A.* Indica con *P* l'intersezione della bisettrice dell'angolo interno con il lato *BC* e manda da *P* la parallela ad *AC*. Sia *Q* la sua intersezione con *AB* e *R* la sua intersezione con la bisettrice dell'angolo esterno. Dimostra che il triangolo *PAR* è rettangolo in *A* e che *AQ* ne è una mediana.
48	Dimostra che il baricentro del triangolo ABC coincide con il baricentro del triangolo MNP con M, N, P punti medi dei lati del triangolo dato.
49	E' dato il trapezio rettangolo ABCD, rettangolo in A e D, con la base maggiore AB $\cong$ 2CD. La perpendicolare a CB in B incontra la retta AD in P; dimostra che l'ortocentro del triangolo BPD coincide col punto medio di AB.
50	Sia O l'ortocentro del triangolo ABC; dimostra che B è l'ortocentro del triangolo AOC.
51	Dimostra che in un triangolo rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa.
52	Il baricentro del triangolo ABC coincide col circocentro. Dimostra che ABC è equilatero.
53	Il circocentro del triangolo ABC coincide con l'incentro. Dimostra che ABC è equilatero.
54	Sia O l'incentro del triangolo ABC; la parallela a BC passante per O incontra AB in P e AC in Q. Dimostra che il segmento PQ è congruente alla somma dei segmenti BP e CQ.
55	Nel triangolo rettangolo ABC sia BH l'altezza relativa all'ipotenusa, N il punto medio del segmento HC e M il punto medio del segmento BH. Dimostra che M è l'ortocentro del triangolo ABN.
56	Il triangolo ABC è tale che l'angolo B$\hat{A}$C misura il doppio dell'angolo A$\hat{B}$C. Per l'incentro O del triangolo conduci la parallela ad AB che interseca BC in D; dimostra che OA $\cong$ OD $\cong$ DB.
57	Nel triangolo rettangolo ABC retto in B, BC>AB; la circonferenza di centro l'incentro O e raggio AO incontra i prolungamenti di AO ed AB in M ed N rispettivamente. Dimostra che MN è parallelo a BC.
58	In un triangolo ABC le mediane BM e CN sono uguali. Dimostra che il triangolo è isoscele.
59	Dimostra che gli assi dei segmenti che congiungono l'incentro di un triangolo equilatero con gli estremi di un lato dividono uno dei lati in tre parti congruenti.
60	Del triangolo rettangolo ABC retto in A considera il baricentro G e la sua proiezione P su un cateto. Dimostra che il perimetro del triangolo ABC misura il triplo di quello del triangolo AGP.