# Problemi di geometria

## sui poligoni inscritti e circoscritti

| triangoli inscritti e circoscritti | |
|---|---|
| 1 | Dimostra che, se in un triangolo il centro della circonferenza inscritta coincide con il centro della circonferenza circoscritta, il triangolo dato è equilatero. |
| 2 | Data una circonferenza $\gamma$ di centro $O$, sia $ABC$ un triangolo inscritto in essa e sia $H$ il piede della perpendicolare condotta da $C$ ad $AB$. Dimostra che $A\hat{C}H \cong O\hat{C}B$. |
| 3 | Dimostra che il punto di incontro delle tre bisettrici di un triangolo è il centro del cerchio inscritto in esso. |
| 4 | Dimostra che se il centro della circonferenza inscritta in un triangolo $ABC$ appartiene all'altezza relativa ad $AB$, allora il triangolo $ABC$ è isoscele sulla base $AB$. |
| 5 | Considera un triangolo isoscele $ABC$ di vertice $C$, circoscritto ad un cerchio di centro $O$; siano $Q$ e $P$ i punti di tangenza con i due lati congruenti $CB$ e $AC$ e sia $R$ il punto di tangenza con la base. Dimostra che il perimetro del triangolo dato è congruente a $4QB+2QC$. |
| 6 | Dimostra che le semirette bisettrici degli angoli di un triangolo dimezzano gli archi determinati dai vertici del triangolo sulla circonferenza circoscritta. |
| 7 | Sia $ABC$ un triangolo inscritto in una circonferenza γ di centro $O$ e sia $M$ il punto medio dell'arco $BC$. Dimostra che l'angolo $O\widehat{M}A$ è congruente alla semidifferenza degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$. |
| 8 | Disegna una circonferenza $\gamma$ circoscritta ad un triangolo $ABC$ qualsiasi. Sia $D$ il punto medio dell'arco $BC$ che non contiene $A$. Dimostra che $AD$ è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. |
| 9 | Sia data una semicirconferenza di diametro $AB$ e centro $O$. Traccia da $A$ e $B$ le tangenti alla semicirconferenza e indica rispettivamente con $M$ e $N$ le intersezioni con la tangente in un punto $C$ dell' arco $AB$. Dimostra che il triangolo $MON$ è rettangolo. |
| 10 | Sia $ABC$ un triangolo e sia $\gamma$ la circonferenza circoscritta ad esso. L'asse del lato BC incontra l'arco BC non contenente A nel punto D. Dimostra che $AD$ è la bisettrice dell'angolo in $\hat{A}$. |
| 11 | Considera un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza. Dimostra che il diametro della circonferenza è congruente alla differenza fra l'ipotenusa e la somma dei cateti. |
| 12 | Dimostra che, a seconda che un triangolo sia acutangolo, ottusangolo, rettangolo, il centro della circonferenza circoscritta al triangolo cade nell'interno, esternamente o sul contorno del triangolo. |
| 13 | Sia data una circonferenza γ e un triangolo equilatero $ABC$ inscritto in essa. Sia $P$ un punto qualsiasi dell'arco $CB$ non contenente il vertice $A$. Congiungi il punto $P$ con i punti $A$, $B$ e $C$ e prendi su $PA$ un segmento $PD \cong PB$. Dimostra che il triangolo $PDB$ è ancora un triangolo equilatero e che i triangoli $PBC$ e $DBA$ sono congruenti. |
| 14 | Il triangolo $ABC$, isoscele sulla base $BC$, è inscritto in una circonferenzaγ; sia il punto $O$ il suo incentro. Prolunga la retta $BO$ in modo che intersechi ulteriormente la circonferenza in $D$; Prolunga la retta $CO$ in modo che intersechi ulteriormente la circonferenza in $F$. Dimostra che il quadrilatero $AFOD$ è un rombo. |

# Problemi di geometria

## sui poligoni inscritti e circoscritti

| | quadrilateri inscritti e circoscritti |
|---|---|
| 15 | Sia $ABC$ un triangolo rettangolo di ipotenusa $AB$. Indicato con $C'$ il simmetrico del punto $C$ rispetto all'ipotenusa $AB$, dimostra che il quadrilatero $AC'BC$ è inscrivibile in una circonferenza. |
| 16 | Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza e sia $E$ il punto di intersezione dei prolungamenti dei suoi lati $BC$ e $AD$. Dimostra che i triangoli $CDE$ e $ABE$ sono equiangoli. |
| 17 | Sia $\gamma$ una circonferenza di diametro $AB$; traccia le rette $a$ e $b$ tangenti rispettivamente in $A$ e $B$ alla circonferenza. Siano $C$ e $D$ due punti appartenenti alla retta $a$, equidistanti dal punto $A$; da essi traccia le tangenti alla circonferenza indica con $E$ e $F$ i punti in cui tali tangenti incontrano la retta $b$. Dimostra che il quadrilatero $CDFE$ è un trapezio isoscele. |
| 18 | Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Dimostra che, condotte le diagonali $AC$ e $BD$, gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti. Reciprocamente, dimostra che se in un quadrilatero $ABCD$ gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti, allora esso è inscrittibile. |
| 19 | Dimostra che due lati opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, in cui una diagonale sia un diametro, si proiettano sull'altra diagonale secondo due segmenti congruenti. |
| 20 | Traccia un segmento $AB$ di punto medio $M$. Da parti opposte rispetto ad $AB$ disegna due triangoli $ABE$ e $ABF$ aventi entrambi $AB$ come ipotenusa. Dimostra che i punti $E$ e $F$ sono equidistanti da $M$ e che il quadrilatero $AEBF$ è inscrivibile. |
| 21 | Data una semicirconferenza di diametro $AB$ e di centro $O$, considera su di essa un punto $C$ e traccia la bisettrice dell'angolo $B\hat{O}C$. Sia $BD$ (con il punto $D$ sull'arco $BC$) una corda che interseca tale bisettrice nel punto $E$. Dimostra che il quadrilatero $OEDC$ è inscrivibile in una circonferenza. |
| 22 | Sia dato un angolo convesso di vertice $P$. Da un punto $A$, interno all'angolo, conduci le distanze $AB$ e $AC$ ai lati dell'angolo $\hat{P}$. Dimostra che il quadrilatero $ABPC$ è inscrittibile in una circonferenza di diametro $PA$. |
| 23 | Dimostra che, in un trapezio circoscritto a una circonferenza, l'angolo avente come vertice il centro della circonferenza e i lati passanti per gli estremi di un lato obliquo è retto. |
| 24 | Sia $ABC$ un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa $BC$. Tracciata l'altezza $AH$, si mandino dal punto $H$ le perpendicolari ai cateti indicando con $E$ l'intersezione con $AB$ e con $D$ l'intersezione con $AC$. Dimostra che i punti $A$, $E$, $H$, $D$ sono punti di una stessa circonferenza e che il quadrilatero $EBCD$ è inscrivibile in una circonferenza. |
| 25 | Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ e sia $P$ il punto medio dell'arco $AB$. Traccia le corde $PC$ e $PD$ che intersecano la corda $AB$ rispettivamente nei punti $E$ e F. Dimostra che il quadrilatero $CEFD$ è inscrivibile. |
| 26 | Sia $ABCD$ un quadrato; sia $M$ il punto medio del lato $BC$ e sia $E$ la proiezione del punto $A$ sul segmento $MD$. Dimostra che il quadrilatero $ABME$ è inscrivibile in una circonferenza; dimostra che $E\hat{A}B \cong C\hat{M}D$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{M}B \cong C\hat{M}D$. Dimostra, inoltre, che il triangolo $ABE$ è isoscele sulla base $AE$. |
| 27 | Sia $ABC$ un triangolo acutangolo. Considera sul lato $BC$ un punto $H$ e chiama $K$ e $R$ rispettivamente le proiezioni del punto $H$ sui lati $AB$ e $AC$. Nell'ipotesi che il quadrilatero $BKRC$ sia inscrivibile in una circonferenza, dimostra che $K\hat{B}H$ e $K\hat{R}H$ sono angoli complementari e che il quadrilatero $AKHR$ è inscrivibile in una circonferenza. Dimostra, inoltre, che $K\hat{R}H \cong K\hat{A}H$ e che il punto $H$ è il piede dell'altezza relativa al lato $BC$ del triangolo $ABC$. |

# Problemi di geometria
## sui poligoni inscritti e circoscritti

| | |
|---|---|
| 28 | Sia $ABCD$ un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza. Le diagonali di $ABCD$ si tagliano ad angolo retto nel punto $P$. Traccia la distanza del punto $P$ dal lato $CD$ e prolungala fino ad incontrare il lato $AB$ nel punto $F$. Dimostra che il punto $F$ è il punto medio del lato $AB$. |
| 29 | Sia $ABC$ un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa $AB$. Prendi su $AB$ un segmento $AD \cong AC$. Dal punto $D$ conduci la perpendicolare al lato $AB$ che incontra $CB$ nel punto $E$ e il prolungamento di $AC$ in $F$. Dimostra che $AE$ è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ e che $CD$ è parallelo a $BF$. Dimostra che il trapezio $CFBD$ è isoscele e che è inscrivibile in una circonferenza. |

| poligoni regolari | |
|---|---|
| 30 | Dimostra che un angolo di un poligono regolare viene diviso in angoli congruenti dalle diagonali uscenti dal suo vertice. |
| 31 | Dimostra che il lato di un esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta. |
| 32 | Dato un esagono regolare, dimostra che prolungando nei due sensi tre lati non consecutivi di esso si ottiene un triangolo equilatero in cui ogni lato è congruente al triplo di quello dell'esagono considerato. |
| 33 | Dimostra che se una circonferenza è divisa in $n$ archi congruenti, il poligono che si ottiene congiungendo successivamente i punti di divisione è regolare. |
| 34 | Disegna un pentagono regolare e dimostra che congiungendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un altro pentagono regolare. |
| 35 | Considera un pentagono regolare e dimostra che le due diagonali uscenti da un suo vertice dividono l'angolo in tre parti congruenti |
| 36 | Dimostra che un poligono che sia inscrittibile e circoscrittibile a due circonferenze concentriche è regolare. |
| 37 | Dimostra che l'apotema di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. |
| 38 | Dimostra che un poligono equiangolo inscritto in una circonferenza è regolare se il numero dei suoi lati è dispari. |
| 39 | Dimostra che, dato un ottagono regolare, prolungando, da entrambe le parti, quattro dei suoi lati, alternando un lato sì e un lato no, tali prolungamenti individuano un quadrato. |
| 40 | Dimostra che ogni poligono equilatero inscritto in una circonferenza è regolare. |
| 41 | Dato un triangolo equilatero $ABC$, prolungando il lato $CA$ di un segmento $AF \cong CA$ e facendo lo stesso per gli altri due lati $AB$ e $BC$, si ottengono due punti $G$ e $E$. Dimostra che il triangolo $EFG$ è equilatero e che le due circonferenze circoscritte ai due triangoli $ABC$ e $EFG$ sono concentriche. |
| 42 | Dimostra che in un pentagono regolare ogni diagonale ne divide un'altra in due parti di cui la maggiore è congruente al lato del pentagono. |

# Problemi di geometria

## sui poligoni inscritti e circoscritti

| | |
|---|---|
| 43 | Considera un poligono regolare di cinque o più lati e traccia le diagonali che congiungono i vertici non consecutivi di esso. Dimostra che tali congiungenti, incontrandosi, formano un poligono regolare. |
| 44 | Sia dato un esagono regolare; costruisci su ciascuno dei suoi lati un quadrato. Dimostra che i vertici dei quadrati non comuni con l'esagono sono i vertici di un dodecagono regolare. |
| 45 | Considera una circonferenza $\gamma$ e quattro rette $l$, $r$, $s$, e $t$ ad essa tangenti, a due a due parallele. Indicati con $A$, $B$, $C$, $D$, i punti di contatto con la circonferenza e con $E$, $F$, $G$, $H$ i punti di intersezione delle rette fra loro, dimostra che $EFGH$ è un rombo e che $ABCD$ è un rettangolo. |
| 46 | Dato un quadrato $ABCD$ di diagonale $AC$, congiungi il punto medio $M$ di $AB$ con il punto medio $N$ di $AD$ e prolunga $MN$ fino ad intersecare il prolungamento di $CD$ in $E$. Dimostra che $AMDE$ è un parallelogramma e che $AC \perp MN$ e $CN \perp AE$. |

| problemi vari | |
|---|---|
| 47 | Dimostra che ogni trapezio isoscele con il lato obliquo congruente alla semisomma delle basi è circoscrittibile ad una circonferenza. |
| 48 | Considera un trapezio ABCD rettangolo in A e D circoscritto a una semicirconferenza. Dimostra che il centro della semicirconferenza è il punto medio di AD. |
| 49 | Il quadrilatero ABCD ha gli angoli $\widehat{B}$ e $\hat{C}$ che misurano rispettivamente 65° e 117°; calcola il valore delle ampiezze degli altri angoli sapendo che il quadrilatero è inscritto in una circonferenza. |
| 50 | Dagli estremi A e B del diametro della circonferenza $\gamma$ conduci le corde AC e BD parallele tra loro. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rettangolo. |
| 51 | Data una circonferenza $\gamma$, dimostra che conducendo le tangenti da due suoi diametri si ottiene un rombo circoscritto alla circonferenza. |
| 52 | Dal punto P esterno alla circonferenza $\gamma$ manda due secanti PA e PC le cui parti esterne sono rispettivamente PB e PD e tali che $PB \cong BD$; dimostra che il triangolo PAC è isoscele. |
| 53 | Il trapezio isoscele ABCD è circoscritto alla circonferenza $\gamma$; sapendo che la base maggiore è tripla della minore, dimostra che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano 60°. |
| 54 | Da un punto P esterno ad una circonferenza $\gamma$ manda due secanti che intercettino su $\gamma$ segmenti di uguale lunghezza. Dimostra che i quattro punti d'intersezione di dette secanti con $\gamma$ sono i vertici di un trapezio isoscele. |
| 55 | Dimostra che in ogni triangolo equilatero il raggio della circonferenza circoscritta misura il doppio del raggio della circonferenza inscritta al triangolo. |
| 56 | E' dato il triangolo acutangolo ABC; siano AH e BK le altezze relative ai lati BC e AC. Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonferenza. |
| 57 | Dimostra che le bisettrici di un quadrilatero convesso individuano un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza. |
| 58 | E' dato l'esagono regolare ABCDEF di centro O; sia P il punto in cui si incontrano le rette AB e CD. Dimostra che il quadrilatero APCO è inscrivibile in una circonferenza. |