

# Luoghi geometrici - coniche

1	Determinare il luogo dei punti $P(\sqrt{4+2t^2}, 1+t)$ individuati dal parametro $t$	$x = \sqrt{2y^2 - 4y + 6}$
2	Determinare il luogo dei punti $P(t^2 + 2t, 3t + 1)$ individuati dal parametro $t$	$x = \frac{(y-1)^2}{9} + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}$
3	Determinare il luogo dei punti $P\left(\frac{t+2}{t}, \frac{t}{1-t}\right)$ individuati dal parametro $t$	$y = \frac{2}{x-3}$ <i>escluso il punto (1, -1)</i>
4	Determinare il luogo dei vertici del fascio di parabole di equazione $y = (4+m)x^2 + 8x - m + 1$	$y = \frac{4x^2 + 5x + 4}{x}$
5	Determinare il luogo dei vertici del fascio di parabole di equazione $y = x^2 + (m+3)x + 1$	$y = 1 - x^2$
6	Determinare il luogo dei vertici del fascio di parabole di equazione $y = -x^2 + 6x + 2m + 3$	$x = 3$
7	Determinare il luogo dei centri di simmetria del fascio di iperboli equilateri traslate di equazione $y = \frac{mx+2m-3}{2x+m}$	$y = -x$
8	Determinare il luogo dei centri di simmetria del fascio di iperboli equilateri traslate di equazione $y = \frac{2x-2m+1}{x+m}$	$y = 2$ <i>tranne il punto <math>(-\frac{1}{4}, 2)</math></i>
9	Determinare il luogo dei centri di simmetria del fascio di iperboli equilateri traslate di equazione $y = \frac{x+5}{(2m+1)x-m}$	$y = 1 - 2x$ <i>tranne i punti <math>(-5, 11)</math> e <math>(\frac{1}{2}, 0)</math></i>
10	Determinare il luogo geometrico individuato dal punto medio del segmento avente come estremi: $P(1+t^2, 3-t)$ e $Q(2t^2, 3t+5)$	$x = \frac{3}{2}y^2 - 12y + \frac{49}{2}$
11	Determinare il luogo geometrico individuato dal punto medio del segmento avente come estremi: $P(1, t+1)$ e $Q(\sqrt{t}, 3t-1)$	$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{y} + \frac{1}{2}$
12	Determinare il luogo geometrico individuato dal punto medio del segmento avente come estremi: $P(2t+6, t)$ e $Q(5, 7)$	$x = 2y - \frac{3}{2}$
13	Studiare, al variare dei parametri (a,b,c,d), i luoghi geometrici che possono essere descritti dall'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .	$se\ c = 0\ e\ d \neq 0\ retta\ y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ $Se\ c \neq 0\ e\ \left \frac{a}{c}\frac{b}{d}\right  = 0\ retta\ y = k$ <i>escluso il punto <math>x = -\frac{d}{c}</math></i> $Se\ c \neq 0\ e\ \left \frac{a}{c}\frac{b}{d}\right  \neq 0\ iperbole\ equilatera\ traslata\ in\ C\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$
14	Provare che il luogo geometrico dei vertici delle parabole $y = x^2 - 2kx - k$ è a sua volta una parabola e trovarne l'equazione.	$y = -x^2 - x$

15	Data la parabola $y = x^2 - 2x + 1$ determinare il luogo geometrico dei punti medi del segmento intercettato su di essa dalla retta $y = mx$	$y = 2x^2 - 2x$ con $x \leq -1$ $x \geq 1$
16	Qual è il luogo geometrico dei punti che si trovano a distanza 2 dall'asse delle $y$ ?	La coppia di rette parallele $x = \pm 2$
17	Qual è il luogo geometrico dei punti che si trovano a distanza 2 dalla retta $y = \sqrt{3}x + 5$ ?	La coppia di rette parallele $y = \sqrt{3}x + 1$ e $y = \sqrt{3}x + 9$
18	Qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti dall'asse $x$ e dalla curva di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ ? Di che curva si tratta?	La parabola $4y = x^2$
19	Qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due curve di equazioni rispettivamente $4x^2 + 4y^2 - 8\sqrt{3}x - 4y - 3 = 0$ e $4x^2 + 4y^2 - 8\sqrt{3}x - 4y - 7 = 0$ ? Di che cosa si tratta?	La circonferenza $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - y - \sqrt{5} + 1 = 0$
20	Considerare la circonferenza centrata in $O$ passante per il punto $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e la sua corda $AB$ parallela all'asse ascisse. Qual è il luogo geometrico descritto dal punto medio del segmento $AC$ , se $C$ è un punto variabile sul maggiore dei due archi $AB$ ?	L'arco superiore alla retta $y = -\frac{1}{2}$ della circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{3}x - y}{2}$
21	Nella stessa situazione del problema precedente, si consideri il luogo geometrico descritto dal punto medio del segmento $BC$ . Il risultato è lo stesso del problema 20?	l'arco superiore alla retta $y = -\frac{1}{2}$ della circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{-\sqrt{3}x - y}{2}$
22	Ancora nella situazione del problema 20, quale risulterebbe essere il luogo geometrico descritto dal punto medio del lato $AC$ , se $C$ fosse vincolato a variare sul minore dei due archi $AB$ ? La soluzione sarebbe la stessa?	l'arco inferiore alla retta $y = -\frac{1}{2}$ della circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{3}x - y}{2}$
23	Considerare un segmento di lunghezza unitaria i cui estremi sono liberi di muoversi uno sul semiasse positivo delle $x$ e l'altro sul semiasse positivo delle $y$ . Quale luogo geometrico è descritto dal punto medio del segmento al variare della posizione dei suoi estremi?	L'arco della circonferenza $4x^2 + 4y^2 = 1$ contenuto nel primo quadrante
24	Considerare un quadrato di lato 1 ed un segmento, anch'esso di lunghezza unitaria, con gli estremi vincolati ad appartenere al contorno del quadrato. Qual è il luogo geometrico descritto dal suo punto medio al variare della sua posizione nel quadrato?	È formato dagli assi dei lati del quadrato e dagli archi ampi $90^\circ$ delle circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ centrate nei vertici
25	Considerare un segmento di lunghezza $2\alpha$ i cui estremi sono vincolati ad appartenere alla circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Quale luogo geometrico è descritto dal punto medio del segmento al variare della posizione dei suoi estremi? Per quali valori di $\alpha$ ?	Se $0 \leq \alpha < 2$ il luogo geometrico è $x^2 + y^2 = 4 - \alpha^2$ ; se $\alpha = 2$ è l'origine; se $\alpha > 2$ il problema è impossibile
26	Qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti dall'asse delle ascisse e da una retta del fascio $y = mx + 1$ al variare di $m$ nell'insieme dei numeri reali? Qual è, in particolare, la soluzione nel caso $m = 1$ ?	Se $m \neq 1$ , si tratta delle bisettrici degli angoli formati dalla retta del fascio e dell'asse delle $x$ ; se $m = 1$ , è la sola retta $y = \frac{1}{2}$

27	Qual è il luogo geometrico dei punti che si trovano a distanza $\alpha$ dalla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine? Come cambia la soluzione a seconda del valore di $\alpha$ ? Si analizzino tutti i casi possibili	Se $\alpha = 0$ , $x^2 + y^2 = 1$ ; se $0 < \alpha < 1$ , il luogo è costituito da $x^2 + y^2 = (1 + \alpha)^2$ e $x^2 + y^2 = (1 - \alpha)^2$ ; se $\alpha = 1$ , da $x^2 + y^2 = 2$ e dall'origine; se infine $\alpha > 1$ , il luogo è $x^2 + y^2 = (1 + \alpha)^2$
28	Data una retta $d$ parallela all'asse $x$ e un punto $F$ che non appartiene a $d$ , qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti a $d$ passanti per $F$ ?	La parabola di retta direttrice $d$ e fuoco $F$
29	Sull'asse delle ascisse si prendano due punti distinti $A$ e $B$ . Dato un terzo punto $P$ , si costruisca la circonferenza di centro $P$ e raggio $PB$ ; si congiungano poi $A$ e $P$ e si prolunghi $AP$ dalla parte di $P$ fino ad intersecare la circonferenza in $C$ . Fissato un qualsiasi valore $k > AB$ , qual è il luogo geometrico dei punti $P$ tale che la lunghezza di $AC$ sia costantemente uguale a $k$ ?	L'ellisse di fuochi $A$ e $B$ con asse minore lungo $\sqrt{k^2 - AB^2}$
30	Dati i due punti $A(0, -2)$ e $B(0,2)$ , considerare un terzo punto $P$ appartenente al semi-piano delle $y$ positive, la circonferenza $\Gamma$ di centro $P$ e raggio $PB$ ed il segmento $AP$ . Si nomini $C$ l'intersezione di $AB$ con $\Gamma$ . Fissato un qualsiasi valore $0 < k < 2$ , qual è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la lunghezza di $AC$ sia costantemente uguale a $2k$ ?	Il ramo dell'iperbole di equazione $k^2x^2 + (k^2 - 4)y^2 = k^2(k^2 - 4)$ giacente al di sopra dell'asse delle ascisse
31	Considerare la semicirconferenza $\Gamma$ di equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ , e si nomini $AB$ il suo diametro. Qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti sia al diametro $AB$ sia internamente a $\Gamma$ ?	L'arco $AB$ della parabola di equazione $y = \frac{1-x^2}{2}$
32	Disegnare nel piano cartesiano le due circonferenze $\Gamma$ e $\Gamma'$ di equazioni rispettivamente $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + 2y = 0$ ; qual è la loro posizione reciproca? Qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti sia a $\Gamma$ internamente sia a $\Gamma'$ esternamente?	Sono tangenti internamente; il luogo è l'ellisse di equazione $9x^2 + 8y^2 + 8y = 16$
33	Disegnare nel piano cartesiano le due circonferenze $\Gamma$ e $\Gamma'$ di equazioni rispettivamente $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 8y = -12$ ; qual è la loro posizione reciproca? Qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti esternamente sia a $\Gamma$ sia a $\Gamma'$ ?	Sono tangenti esternamente; il luogo è la retta di equazione $y = 2$
34	Disegnare nel piano cartesiano le due circonferenze $\Gamma$ e $\Gamma'$ di equazioni rispettivamente $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 6y = -8$ ; qual è la loro posizione reciproca? Qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti esternamente sia a $\Gamma$ sia a $\Gamma'$ ?	Sono tangenti esternamente; il luogo è il ramo d'iperbole di equazione $x^2 - 8y^2 + 24y = 16$ passante per $(0,2)$
35	Disegnare nel piano cartesiano le due circonferenze $\Gamma$ e $\Gamma'$ di equazioni rispettivamente $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$ ; qual è la loro posizione reciproca? Qual è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti sia a $\Gamma$ internamente sia a $\Gamma'$ esternamente?	Sono concentriche; il luogo è la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 9$