Le coniche

classificazione e problemi

1	Al variare del parametro a classificare la conica di equazione $ax^2 + ay^2 - 9 = 0$	$se\ a = 0\ nessuna\ conica$ $se\ a \neq 0\ circonferenza$ $di\ centro\ l'origine\ e\ raggio\ \frac{3\sqrt{a}}{a}$
2	Al variare del parametro a classificare la conica di equazione $ax^2 + by^2 - 16 = 0$	$se\ a = 0\ e\ b \neq 0\ due\ rette$ $y = \frac{4\sqrt{b}}{b}\ e\ y = -\frac{4\sqrt{b}}{b}$ $se\ b = 0\ e\ a \neq 0\ due\ rette$ $x = \frac{4\sqrt{a}}{a}\ e\ x = -\frac{4\sqrt{a}}{a},$ $se\ a = b = 0\ nessuna\ conica$ $se\ a =\neq 0$ $una\ circonferenza\ di\ centro$ $origine\ e\ raggio\ \frac{4\sqrt{b}}{b}$
3	Al variare dei parametri $a, b, c,$ classificare la conica di equazione: $ax^2 + bx + 5y - c = 0$	$se\ a = 0\ retta,$ $se\ b = 0\ e\ a \neq 0$ $parabola\ con\ V\left(0, \frac{c}{5}\right)$ $se\ c = 0$ $parabola\ con\ V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{20a}\right)$ $se\ a \neq 0\ e\ b \neq 0$ $parabola\ con$ $asse\ parallelo\ all'asse\ y$
4	$Al\ variare\ dei\ parametri\ a, b, c, classificare\ la\ conica\ di\ equazione:$ $ax^2 + by^2 + cx + 3 = 0$	$se\ a = 0\ e\ c \neq 0$ $parabola\ con\ asse$ $parallelo\ all'asse\ x$ $se\ b = 0\ e$ $c \leq -2\sqrt{3a} \cup c \geq 2\sqrt{3a}$ $rette$ $se\ c = 0\ e\ a \neq 0\ e\ b \neq 0$ $nessuna\ conica$ $se\ a = b = 0\ e\ c \neq 0$ $retta\ x = -\frac{3}{c}$ $se\ a \neq c \neq 0\ e\ b < 0\ iperbole$ $se\ a \neq c \neq 0\ e\ b > 0$ $nessuna\ conica$
5	Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione $(k-4)x^2 + (2-k)y^2 - kx + (k+2)y + k + 3 = 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo a uno degli assi coordinati.	$k = 4;\ k = 2$
6	Determina per quali valori del parametro reale h l'equazione $(4h-5)x^2 + (2h+3)y^2 - hx + (2h+1)y + 5 = 0$ rappresenta un'iperbole e, in particolare, per quali valori è anche equilatera.	$-\frac{3}{2} < h < \frac{5}{4};$ equilatera: h=$\frac{1}{3}$
7	Determina i valori del parametro reale k per i quali l'equazione $(3k-4)x^2 + (k+2)y^2 - 3x + y + 1 = 0$ rappresenta un'ellisse e, in particolare, quelli per cui rappresenta una circonferenza.	k<-2 e $\frac{4}{3} < k \leq \frac{1+\sqrt{139}}{6};$ circonferenza: impossibile

8	Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione $(k+2)x^2+ky^2+3x-2y+1=0$ rappresenta: a) un'iperbole; b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; c) un'ellisse.	iperbole: -2<k<0; parabola: k= -2 e k=0; ellisse: k< -2 e 0<k≤ $\frac{5+3\sqrt{17}}{8}$
9	Una conica degenera nelle due rette di equazioni $x-y=0$ e $2x+y=1$. Scrivi la sua equazione.	$2x^2-xy-y^2-x+y=0$
10	Stabilisci la posizione delle seguenti rette rispetto alle coniche date: a) $y=2-x$ rispetto alla conica $3x^2-2xy+y^2-4y=6$; b) $y=2x+1$ rispetto alla conica $x^2+xy-y^2+3x+y-1=0$; c) $x+2y=3$ rispetto alla conica $2x^2-xy+5y^2+6x-y=0$.	*a) secante in (-1;3) e* $(\frac{5}{3};\frac{1}{3})$ *b) tangente in (1;3)* *c) esterna*
11	Determina il centro della conica di equazione $2x^2-6xy+5y^2+22x-36y+11=0$.	$(-1;3)$
12	Verifica che la curva di equazione $25x^2-10xy+y^2+40x-8y+7=0$ ha infiniti centri e determina l'equazione dei centri.	$5x-y-4=0$
13	Dopo aver verificato che la conica di equazione $6x^2+4xy+y^2+4x-2y+2=0$ è a centro, trasformala traslando l'origine degli assi nel centro della conica.	$6x^2+4xy+y^2-7=0$
14	Determina i valori di m e n affinché l'equazione $mx^2+12xy+9y^2+4x+ny-13=0$ rappresenti: a) una conica a centro; b) una conica senza centro; c) una conica con infiniti centri.	$a)\ m\neq 4, \forall n$ $b)\ m=4, n\neq 6$ $c)\ m=4, n=6$
15	Data la conica di equazione $4x^2-4xy+y^2+6x+1=0$, determina il valore del coefficiente m affinché la retta $y=mx$: a) intersechi la conica in un solo punto; b) sia tangente alla curva; c) intersechi la curva.	$a)\ m=2$ $b)\ m=-1$ *e* $m=5$ $c)\ m<-1, m>5$
16	Ridurre a una forma più semplice, mediante traslazione degli assi coordinati, la curva rappresentata dall'equazione $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.	*equazione ellittica* $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$ *nuova origine (5; -2)*
17	Dopo aver verificato che, con trasformazioni delle coordinate, l'equazione $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$ rappresenta un'ellisse, calcola la misura dei semiassi.	$3;1$
18	Calcola le coordinate dell'ellisse degenere di equazione $x^2-6xy+10y^2+10x-32y+26=0$.	$(-2;1)$
19	Calcola la misura dei semiassi dell'iperbole di equazione $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$.	$2;1$
20	Scrivi le equazioni delle due rette incidenti dell'iperbole degenere di equazione $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$.	$x+y-1=0$ $3x+y+1=0$
21	Riduci a forma normale l'equazione parabolica $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.	$y'^2=2x'$
22	Con trasformazioni delle coordinate, calcola il parametro della parabola di equazione $9x^2-6xy+16y^2-120x+90y=0$.	3

24	Con trasformazioni delle coordinate, determina le equazioni delle rette parallele e distinte di equazioni $4x^2+4xy+y^2-12x-6y+5=0$.	$2x+y-5=0$ $2x+y-1=0$
24	Trasforma le curve: $x^2+y^2=1$ e $y=-2x^2+1$ mediante la traformazione $\begin{cases} x=\frac{1}{2}x'+y' \\ y=\frac{1}{2}x' \end{cases}$	$x^2+2xy+2y^2-2=0$ (*ellisse*) $x^2+4y^2+4xy+x-2=0$ (*parabola*)
25	Studia la conica di equazione $xy+x+4y=0$ determinandone il centro, i fuochi, gli eventuali asintoti e le direttrici.	*iperbole, C(-4;-1)* $F_1(2\sqrt{2}-4, 2\sqrt{2}-1)$ $F_2(-2\sqrt{2}-4;\ -2\sqrt{2}-1)$ *asintoti*: $x=-4$ e $y=-1$
26	Determina il luogo dei punti $P(x;y)$ del piano le cui coordinate sono espresse in funzione del parametro reale k: $P\left(\sqrt{4-k^2};\frac{k+1}{\sqrt{3}}\right)$.	arco dell'ellisse traslata: $x^2+3y^2-2\sqrt{3}y-3=0$
27	Sia F il punto di coordinate $(-1;0)$. Determina il luogo dei punti P del piano per i quali la somma fra la distanza dall'asse delle ascisse e il doppio della distanza da F è 5.	$\frac{3}{25}(x+1)^2+\frac{9}{100}\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=1$ *con* $0\le y\le 5$ $\frac{3}{25}(x+1)^2+\frac{9}{100}\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=1$, *con* $-5\le y<0$
28	Dati i punti $F_1(1;-1)$, $F_2(1;3)$ e la retta d di equazione $y=\frac{11}{2}$, determina il luogo dei punti P del piano per i quali $PF_1+PF_1=6$	$(x-1)^2+(y-1)^2=45$
29	Dati i punti $A(-2;0)$, $B(3;1)$ e P variabile sulla parabola di equazione $y=x^2-x$, determina il luogo descritto dal baricentro del triangolo ABP.	$y=3x^2-3x+1$
30	Considera i punti $A(-2;0)$, $B(4;0)$. Scrivi l'equazione del luogo descritto dall'ortocentro del triangolo ABP, con il punto P che varia sulla retta di equazione $y=3$	$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$
31	Determina l'equazione del luogo geometrico descritto dai vertici delle parabole del fascio di equazione $y=4x^2-(k-2)x+k+1$	$y=-4x^2+8x+3$
32	Scrivi l'equazione del luogo descritto dai centri delle circonferenze del fascio di equazione $kx^2+ky^2-4(2+k)x-2y+1=0$	$x-4y-2=0$
33	Determina l'equazione del luogo descritto dai centri delle funzioni omografiche del fascio di equazione $y=\frac{(1+m)x+2}{4+(m+2)x}$	$x-4y+4=0$
34	Sia data la parabola di equazione $y=x^2-2x+2$; determina il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti nel suo punto di ascissa 2	$y=-\frac{1}{2}x+3$
35	Dato il fascio di parabole di equazione $y-x^2+2x+3+k(2y+x^2-2x-3)=0$, determina: a) le coordinate dei punti base; b) la parabola del fascio passante per $P(2;6)$; c) la parabola del fascio avente il vertice sulla retta di equazione $x+y-2=0$; d) la parabola del fascio tangente alla retta $y=-1$	*a)* $A(-1;0)$ *e* $B(3;0)$ *b)* $y=-2x^2+4x+6$ *c)* $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ *d)* $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

36	Dato il fascio di parabole di equazione $y-\frac{1}{2}x^2+x-1+k(1-3x)=0$, determina: a) i punti base e le caratteristiche del fascio; b) la parabola del fascio avente asse di equazione $x=-1$; c) le parabole del fascio aventi per direttrice l'asse x	a) $A(\frac{1}{3};\frac{13}{18})$ b) le parabole sono tutte congruenti b) $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3}$ c) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$ $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$
37	Determina l'equazione del fascio di circonferenze avente come asse radicale la retta $x+y-4=0$ e come punti base le intersezioni di tale retta con gli assi cartesiani. Stabilisci poi la retta su cui si trovano i centri delle circonferenze del fascio.	$x^2+y^2+(k-4)x+(k-4)y-4k=0$ $y=x$
38	Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze tangenti alla retta $x-3y=0$ nel punto $(3;1)$	$x^2+y^2+(k-6)x-(3k+2)y+10=0$
39	Nel fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+(k-8)x-4k+16=0$, determina per quali valori del parametro k si ottiene: a) la circonferenza degenere; b) la circonferenza passante per O; c) la circonferenza di centro $(6;0)$; d) le circonferenze tangenti alla retta $y=4$	a) 0 b) 4 c) -4 d) 8,-8
40	Nel fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+2(k+1)x+(k-1)y-k=0$, determina per quali valori di k si ottiene: a) la circonferenza avente centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante; b) la circonferenza passante per il centro della prima circonferenza trovata; c) le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$	*a) -3* *b) -2* *c) -3;1*
41	Nel fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+(2k-1)x-(k+4)y+k+3=0$, determina k in modo che la circonferenza corrispondente sia tangente all'asse y.	-2
42	Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per il punto $(1;2)$ e aventi il centro sulla retta $y=x+1$ e determina in esso le circonferenze tangenti alla bisettrice del primo e terzo quadrante.	$x^2+y^2-x-3y+2=0$ $x^2+y^2-3x-5y+8=0$
43	Siano date le circonferenze di equazioni $x^2+y^2+2y-9=0$ e $x^2+y^2-6x-10y+9=0$. Scrivi l'equazione delle circonferenze passanti per i loro punti di intersezione e per l'uno o per l'altro dei centri delle circonferenze date.	$x^2+y^2-2x-2y-3=0$ $2x^2+2y^2-7x-10y+3=0$
44	Dopo aver scritto l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y che sono tangenti in $A(0;1)$ alla retta $y=x+1$, determina fra di esse: a) quella con asse di equazione $y=\frac{3}{4}$; b) quella con vertice sull'asse x; c) quella tangente alla retta $4x+2y-11=0$; determina poi le coordinate del punto di tangenza.	a) $y=-\frac{2}{3}x^2+x+1$ *b)* $y=\frac{1}{4}x^2+x+1$ *c)* $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1$ $(3;-\frac{1}{2})$

45	Dopo aver trovato le coordinate del centro S del fascio di rette di equazione $(1-k)x-y+1-2k=0$: a) determina la retta r avente distanza $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ dall'origine e pendenza positiva; b) scrivi l'equazione della circonferenza Γ tangente ad r in S e avente centro sulla bisettrice del 2° e 4° quadrante; c) determina l'equazione del fascio di circonferenze concentriche a Γ; d) individua in tale fascio la circonferenza Γ' che stacca sull'asse delle ascisse una corda di lunghezza 4	$a)\ 2x-y+3=0$ $b)\ x^2+y^2-8x+8y-13=0$ $c)\ x^2+y^2-8x+8y+k=0$ d) $x^2+y^2-8x+8y+12=0$
46	Determina l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nell'origine alla retta $y=-2x$ e determina in esso le due circonferenze che staccano sulla retta $y=3$ una corda di lunghezza 2. Indicati con C_1, C_2 i loro centri, scrivi l'equazione della parabola passante per C_1 e C_2 e avente vertice V sull'asse delle ordinate. Calcola infine l'area del triangolo C_1C_2V.	$x^2+y^2+10x+5y=0$ $x^2+y^2-4x-2y=0$ $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{3}$ $area=\frac{35}{6}$
47	Sull'ellisse di equazione $9x^2+4y^2=36$, determina un punto P con ascissa non negativa in modo che l'area del triangolo F_1F_2P risulti uguale a k, con $k\in\mathbb{R}_0^+$	2soluzioni simmetriche per $0\le k\le 2\sqrt{5}$
48	Si consideri la parabola con asse parallelo alle asse y, di vertice $V(2;4)$, passante per l'origine e per il punto $B(3;3)$. Determina un punto P appartenente all'arco OVB in modo che il triangolo che ha per vertici l'origine, P e la proiezione C di B sull'asse x abbia area uguale a $k\in\mathbb{R}_0^+$	1 soluzione per $0\le k<\frac{9}{2}$ 2 soluzioni per $\frac{9}{2}\le k\le 6$
49	Sia data la funzione $f(x)=\sqrt{2-x\lvert x\rvert}$. Determina i punti di intersezione della retta $x+3y+q=0$ con la funzione al variare di q. Detto B il punto di intersezione di $f(x)$ con la retta $x-y=0$, determina un punto P di f con ascissa negativa, tale che verifichi la relazione $PO^2-PB^2=2k$, con $k\in\mathbb{R}^+$	1 inters. per $q<-2\sqrt{5}$ $e-4<q\le-\sqrt{2}$ 3 inters. per $-2\sqrt{5}\le q\le-4$ 1 sol per $k>\sqrt{2}-1$
50	Sia dato l'insieme di curve rappresentate dall'equazione $(k-3)x^2+(k-2)y^2-k^2+5k-6=0$, con $k\in\mathbb{R}$. Determina in esso l'iperbole equilatera, l'ellisse con due dei suoi vertici nei punti $(\pm\sqrt{2};0)$ e poi i loro punti di intersezione.	$2x^2-2y^2=1$ $x^2+2y^2=2$ $\left(1;\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-1;\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
51	Considera il fascio di parabole di equazione $ax^2+(a-2)x+y+1-a=0$. Dopo aver verificato che sono secanti, trova i punti base A e B (ascissa di A minore di quella di B). Verifica inoltre che la parabola con vertice di ascissa -1 è simmetrica della parabola con vertice di ascissa 0, rispetto al punto medio M del segmento AB.	$A\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ -\sqrt{5}-2\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \sqrt{5}-2\right)$ $y=2x^2+4x-3$, $y=-2x^2+1$
52	Sia data la famiglia di curve $y=\sqrt{4+mx^2}$, con $m\in\mathbb{R}$. a) identifica il tipo di curva corrispondente ai possibili valori di m; b) determina per quale valore di m si ottiene una semiellisse con fuochi $(0;\pm\sqrt{2})$	*a)* semiellisse per m<0 retta per m=0 ramo di iperbole per m>0 *b)* $m=-2$