

Esercizi guida

indice

1.	$2^x = 8$	pag. 2
2.	$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$	pag. 3
3.	$(8)^{x^2-3x} = 1$	pag. 4
4.	$(243)^{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = (27)^{2(x+1)}$	pag. 5
5.	$4^{\sqrt{x+1}} = 16$	pag. 7
6.	$2^{x+2} + 2^x = 640$	pag. 8
7.	$54 \cdot 3^{2x} = 36 \cdot 4^x$	pag. 9
8.	$4^x + 2^x - 2 = 0$	pag. 10
9.	$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$	pag. 12
10.	$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$	pag. 13
11.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$	pag. 14
12.	$2^x = 5$	pag. 16
13.	$3^x = 5^{x-2}$	pag. 17
14.	$3^{x+1} = 2^{1-x}$	pag. 18
15.	$3^{2x} = 5 \cdot 2^x$	pag. 19
16.	$3^{2x} - 3^{x+1} = -2$	pag. 20

Le equazioni esponenziali si riconoscono immediatamente dal fatto che l'incognita " x " si trova all'esponente. Si possono suddividere in linea di massima in tre tipologie. I prerequisiti **indispensabili** per risolvere le equazioni esponenziali sono la conoscenza delle proprietà delle potenze (consultabili in Schede di Teoria alla sezione Algebra) e le proprietà dell'esponenziale a^x in particolare che la base a è sempre un numero positivo e diverso da uno, che l'esponente x può assumere qualsiasi valore reale ma l'esponenziale a^x assume sempre un valore positivo cioè $a^x > 0$ per ogni valore di a positivo e diverso da uno e per ogni valore reale di x .

Equazioni risolubili mediante l'applicazione delle proprietà delle potenze

Questo primo tipo di equazione si riconosce dal fatto che è possibile ridurla a **due soli** termini con la **stessa base**, utilizzando le scomposizioni e le proprietà delle potenze. A questo punto, essendo le basi uguali, basta uguagliare gli esponenti: $a^x = a^n \rightarrow x = n$. Si ottiene così un'equazione algebrica che va risolta.

1. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$2^x = 8$$



Portiamo entrambi i membri dell'equazione esponenziale alla stessa base

$$2^x = 8$$

Scriviamo **8** come **2^3**

$$2^x = 2^3$$

Essendo le basi uguali

$$x = 3$$

Si possono uguagliare gli esponenti e si risolve l'equazione

Otteniamo così la soluzione

$$x = 3$$

2. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$$

Possiamo procedere in due modi: portare tutto alla base $\frac{1}{3}$, oppure alla base 3

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$$

scriviamo 3 come $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

Essendo le basi uguali

$$x = -1$$

Si possono uguagliare gli esponenti

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$$

In alternativa
scriviamo $\frac{1}{3}$ come 3^{-1}
quindi $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

$$3^{-x} = 3^1$$

Essendo le basi uguali

$$-x = 1 \rightarrow x = -1$$

Si possono uguagliare gli esponenti

Otteniamo così, in entrambi i casi, la stessa soluzione

$$x = -1$$

3. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$(8)^{x^2-3x} = 1$$



Dobbiamo scrivere 1 come potenza di 8, ricordando che tutti i numeri (eccetto lo zero) elevati a 0 sono uguali a 1

$$(8)^{x^2-3x} = 1$$

scriviamo **1** come **8^0**

$$(8)^{x^2-3x} = 8^0$$

Essendo le basi uguali

$$x^2 - 3x = 0$$

Si possono uguagliare gli esponenti.
Otteniamo un'equazione di secondo grado **spuria**, cioè **manca il termine noto**

$$x(x - 3) = 0$$

La risolviamo raccogliendo la x e applichiamo la legge di annullamento del prodotto

$$x_1 = 0$$

Prima soluzione

$$x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

Seconda soluzione

Otteniamo così le soluzioni

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

4. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$(243)^{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = (27)^{2(x+1)}$$



Dobbiamo scrivere 243 e 27 come potenza di base 3

$$(243)^{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = (27)^{2(x+1)}$$

scriviamo **243** come **3^5**
e **27** come **3^3**

$$3^5 \left(\frac{2}{x}-1\right) = 3^3 (2(x+1))$$

Le basi sono uguali, quindi
possiamo uguagliare gli
esponenti

$$5 \left(\frac{2}{x}-1\right) = 3(2(x+1))$$

Si ottiene un'equazione
algebrica frazionaria che va
risolta

$$\frac{10}{x} - 5 = 6x + 6$$

Calcoliamo il m.c.m.

$$\frac{10-5x}{x} = \frac{6x^2+6x}{x}$$

Il minimo comune multiplo
è **x**

$$\cancel{x} \frac{10-5x}{\cancel{x}} = \frac{6x^2+6x}{\cancel{x}} \cancel{x}$$

Dopo aver considerato la
condizione di esistenza **$x \neq 0$**
moltiplichiamo entrambi i
membri per x e
semplifichiamo

$$-6x^2 - 6x - 5x + 10 = 0$$

Portiamo tutti i termini al
primo membro

$6x^2 + 11x - 10 = 0$	Sommiamo i termini simili e cambiamo il segno a tutti i termini. Otteniamo così un'equazione di secondo grado che va risolta
$x = \frac{-11 \pm 19}{12} = 1 \quad x_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{3}$	Calcoliamo il delta $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 121 + 240 = 361$ Applichiamo la formula risolutiva: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si noti che entrambe le soluzioni sono accettabili C.E. $x \neq 0$	
Otteniamo così le soluzioni: $x_1 = -\frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{2}{3}$	

5. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$4^{\sqrt{x+1}} = 16$$



Dobbiamo scrivere 16 come potenza di 4

$$4^{\sqrt{x+1}} = 16$$

scriviamo **16** come **4^2**

$$4^{\sqrt{x+1}} = 4^2$$

Le basi sono uguali, quindi possiamo uguagliare gli esponenti

$$\sqrt{x+1} = 2$$

Si ottiene un'equazione algebrica irrazionale che va risolta

$$(\sqrt{x+1})^2 = 2^2$$

Poiché al secondo termine abbiamo un valore positivo basta elevare al quadrato entrambi i termini e tener conto del campo di esistenza della radice quadrata
C.E. $x + 1 \geq 0$

$$x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$$

Al primo membro si semplifica la radice, al secondo elevo il numero al quadrato

Si noti che la soluzione è accettabile **C.E.** $x \geq -1$

Otteniamo così la soluzione

$$x = 3$$

6. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$2^{x+2} + 2^x = 640$$



Dobbiamo applicare le proprietà delle potenze e poi raccogliere 2^x per fare in modo da avere solo due termini

$$2^{x+2} + 2^x = 640$$

Ricordiamo che
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ quindi
 $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2$

$$2^x \cdot 2^2 + 2^x = 640$$

Raccogliamo 2^x a fattor comune

$$2^x(2^2 + 1) = 640 \rightarrow 2^x(5) = 640$$

Sviluppiamo i calcoli numerici e dividiamo entrambi i membri per **5**

$$2^x \left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} \right) = \frac{640}{\cancel{5}}$$

Semplifichiamo

$$2^x = 128$$

Scriviamo **128** come **2^7**

$$2^x = \mathbf{2^7} \rightarrow \mathbf{x = 7}$$

Le basi sono uguali, quindi posso uguagliare gli esponenti

Otteniamo così la soluzione:

$$\mathbf{x = 7}$$

7. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$54 \cdot 3^{2x} = 36 \cdot 4^x$$



Dobbiamo applicare le proprietà delle potenze e le semplificazioni

$$\frac{54 \cdot 3^{2x}}{4^x \cdot 54} = \frac{36 \cdot 4^x}{4^x \cdot 54}$$

Dividiamo entrambi i membri per $4^x \cdot 54$ in modo da isolare a primo membro i termini con la "x"

$$\frac{\cancel{54} \cdot 3^{2x}}{\cancel{4^x} \cdot \cancel{54}} = \frac{\cancel{36} \cdot \cancel{4^x}}{\cancel{4^x} \cdot \cancel{54}} \rightarrow \frac{3^{2x}}{4^x} = \frac{\cancel{36}}{\cancel{54}}$$

Semplifichiamo e scriviamo 4^x come 2^{2x}

$$\frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$$

Ma $\frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

Per rendere le basi uguali scriviamo $\frac{2}{3}$ come $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$$2x = -1$$

Le basi sono uguali, quindi posso uguagliare gli esponenti e dividere entrambi i membri per 2

$$x = -\frac{1}{2}$$

Soluzione

Otteniamo così la soluzione:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Equazioni risolubili mediante una variabile ausiliaria

Questo secondo tipo di equazione si riconosce dalla presenza di **più di due termini** che non si possono ridurre solo a due. In questo caso si procede nel seguente modo:

1. Inizialmente si prendono in considerazione solo i termini che contengono l'incognita all'esponente e, utilizzando le scomposizioni e le proprietà delle potenze si portano alla stessa base.
2. Si introduce una variabile ausiliaria ottenendo così un'equazione algebrica che va risolta.

Le soluzioni così ottenute si ripotano alla variabile iniziale, verificando che le soluzioni siano accettabili.

8. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$4^x + 2^x - 2 = 0$$



In questo tipo di equazione dobbiamo portare alla stessa base i termini che contengono l'incognita e poi introdurre una variabile ausiliaria

$$4^x + 2^x - 2 = 0$$

Scriviamo **4** come **2^2**
e quindi **$4^x = 2^{2x}$**

$$2^{2x} + 2^x - 2 = 0$$

Poniamo **$2^x = t$**
e quindi **$2^{2x} = t^2$**

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Otteniamo così
un'equazione di secondo
grado completa che va
risolta

$$t = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \rightarrow t_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Calcoliamo il delta
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = 1 + 8 = 9$
Applichiamo la formula
risolutiva: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



Utilizzando la posizione iniziale bisogna trovare i corrispondenti valori di x e verificare che siano accettabili

$2^x = t_1 \rightarrow 2^x = -2$	Non accettabile perché un'esponenziale è sempre positivo
$2^x = t_2 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$	Accettabile
Otteniamo così la soluzione: $x = 0$	

9. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$



In questo caso, essendo le basi che contengono l'incognita uguali, si può subito introdurre una variabile ausiliaria

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Poniamo $3^x = t$
e quindi $3^{2x} = t^2$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Otteniamo così
un'equazione di secondo
grado completa che va
risolta

$$t = 2 \pm 1 \rightarrow t_1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow t_2 = 2 + 1 = 3$$

Essendo $b = -4$ numero pari,
calcoliamo il delta quarti
 $\Delta/4 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$
 $\Delta/4 = 4 - 3 = 1$
Applichiamo la formula
risolutiva ridotta:
 $x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$



Utilizzando la posizione iniziale bisogna trovare i corrispondenti valori di x e verificare se sono accettabili

$$3^x = t_1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x = 0$$

Accettabile

$$3^x = t_2 \rightarrow 3^x = 3^1 \rightarrow x = 1$$

Accettabile

Otteniamo così le soluzioni:

$$x = 0 \quad x = 1$$

10.Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$$



In questo tipo di equazione si applicheranno prima le proprietà delle potenze e poi si utilizzerà una variabile ausiliaria

$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$$

Ricordiamo che
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ quindi
 $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ e
 $4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 2^{2x} \cdot 2$

$$2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^2 = 320$$

Poniamo $2^x = t$
 e quindi $2^{2x} = t^2$
 sviluppiamo le potenze
 numeriche e ordiamo

$$4t^2 + 8t - 320 = 0 \rightarrow t^2 + 2t - 80 = 0$$

Otteniamo così un'equazione
 di secondo grado completa.
 Dividiamo tutti i termini per 4

$$t = -1 \pm 9 \rightarrow t_1 = -1 - 9 = -10 \quad t_2 = -1 + 9 = 8$$

Essendo $b=2$ numero pari,
 calcoliamo il delta quarti
 $\Delta/4 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$
 $\frac{\Delta}{4} = 1 + 80 = 81$
 Appliciamo la formula
 risolutiva ridotta:
 $x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$

$$2^x = t_1 \rightarrow 2^x = -10$$

Non accettabile perché
 un'esponenziale è sempre
 positivo

$$2^x = t_2 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$$

Accettabile

Otteniamo così la soluzione:

$$x = 3$$

11. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$



In questo tipo di equazione si applicheranno prima le proprietà delle potenze e poi si utilizzerà una variabile ausiliaria

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$

Ricordiamo che
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ quindi
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ e
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 2$$

Poniamo $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$
 e quindi $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t}$

$$t \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot t^{-1} = 2 \rightarrow 3t + \frac{1}{3t} = 2$$

Otteniamo così
 un'equazione algebrica
 frazionaria di cui calcoliamo
 il m.c.m.

$$\frac{9t^2 + 1}{3t} = \frac{6t}{3t}$$

Il minimo comune multiplo
 è $3t$

$$\cancel{3t} \cdot \frac{9t^2 + 1}{\cancel{3t}} = \frac{6t}{\cancel{3t}} \cdot \cancel{3t}$$

Dopo aver considerato la
 condizione di esistenza $t \neq 0$
 moltiplichiamo entrambi i
 membri per $3t$ e
 semplifichiamo

$$9t^2 + 1 - 6t = 0 \rightarrow 9t^2 - 6t + 1 = 0$$

Portiamo tutti i termini al
 primo membro e ordiniamo

$$9t^2 - 6t + 1 = 0 \rightarrow (3t - 1)^2 = 0$$

Osserviamo che il primo
 membro rappresenta il
 quadrato di un binomio e
 quindi si ha:

$$3t - 1 = 0 \rightarrow 3t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{3}$$

Basta porre la base uguale a zero e risolvere l'equazione di primo grado così ottenuta



Utilizzando la posizione iniziale bisogna trovare il corrispondente valore di x e verificare se è accettabile

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \rightarrow x = 1$$

Accettabile

Otteniamo così la soluzione:

$$x = 1$$

Equazioni risolubili mediante l'ausilio dei logaritmi

Questo terzo tipo di equazione si riconosce dal fatto che le **basi** sono **diverse** e non si possono rendere uguali, inoltre l'introduzione di una variabile ausiliaria non porterebbe a nulla.

In questo caso si procede calcolando il logaritmo ad entrambi i membri, per poi utilizzare i teoremi sui logaritmi, in particolare il terzo teorema: $\log_a b^c = c \log_a b$. Si ottiene così un'equazione algebrica che va risolta.

12. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$2^x = 5$$



In questo tipo di equazione le basi sono diverse e non è possibile renderle uguali, una variabile ausiliaria non risolve quindi ci serviremo dei logaritmi

$$\ln 2^x = \ln 5$$

Calcoliamo il logaritmo naturale ($\ln$) di entrambi i membri

$$x \ln 2 = \ln 5 \rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

A primo membro applichiamo il terzo teorema sui logaritmi:
 $\log_a b^c = c \log_a b$
 Dividiamo entrambi i membri per $\ln 2$



per trovare la soluzione abbiamo calcolato ad entrambi i membri il logaritmo in base naturale ($\ln$), ma avremmo potuto scegliere una qualsiasi base, in questo caso poteva convenire di scegliere il logaritmo in base 2, vediamo perché:

$$2^x = 5 \rightarrow \log_2 2^x = \log_2 5 \rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$$

$$x = \log_2 5$$

appliciamo sempre il terzo teorema sui logaritmi: ma per la definizione di logaritmo $\log_2 2 = 1$
 Si ottiene quindi la seguente soluzione

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

Si noti che le due soluzioni, apparentemente diverse, sono equivalenti in base alla formula del cambio di base:
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Otteniamo così la soluzione:

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

13. Esercizio Guida

Risolvi la seguente equazione esponenziale



$$3^x = 5^{x-2}$$



In questo tipo di equazione le basi sono diverse e non è possibile renderle uguali, una variabile ausiliaria non risolve; quindi, ci serviremo dei logaritmi

$3^x = 5^{x-2}$	Calcoliamo il logaritmo naturale ($\ln$) di entrambi i membri
$\ln 3^x = \ln 5^{x-2}$	Applichiamo il terzo teorema sui logaritmi: $\log_a b^c = c \log_a b$
$x \ln 3 = (x - 2) \ln 5$	Effettuiamo le moltiplicazioni
$x \ln 3 = x \ln 5 - 2 \ln 5$	Portiamo a primo membro i termini con l'incognita
$x \ln 3 - x \ln 5 = -2 \ln 5$	Raccogliamo la "x" a primo membro
$x(\ln 3 - \ln 5) = -2 \ln 5$	Notiamo che $\ln 3 - \ln 5$ è un numero negativo



Quando il coefficiente dell'incognita "x" è un numero negativo è conveniente renderlo positivo moltiplicando ambo i membri per "-1" e poi dividere per il coefficiente stesso in modo da isolare la "x" e risolvere l'equazione

$x(\ln 5 - \ln 3) = 2 \ln 5$	Dividiamo ambo i membri per $\ln 5 - \ln 3$
$x = \frac{2 \ln 5}{\ln 5 - \ln 3} = \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}}$	La soluzione può essere scritta in forma equivalente ricordando che: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

Otteniamo così la soluzione:

$$x = \frac{2 \ln 5}{\ln 5 - \ln 3}$$

14. Esercizio Guida

Risolviamo la seguente equazione esponenziale



$$3^{x+1} = 2^{1-x}$$



In questo tipo di equazione le basi sono diverse e non è possibile renderle uguali, una variabile ausiliaria non risolve; quindi, ci serviremo dei logaritmi

$3^{x+1} = 2^{1-x}$	Calcoliamo il logaritmo naturale ($\ln$) di entrambi i membri
$\ln 3^{x+1} = \ln 2^{1-x}$	Applichiamo il terzo teorema sui logaritmi: $\log_a b^c = c \log_a b$
$(x+1) \ln 3 = (1-x) \ln 2$	Effettuiamo le moltiplicazioni
$x \ln 3 + \ln 3 = \ln 2 - x \ln 2$	Portiamo a primo membro i termini con l'incognita
$x \ln 3 + x \ln 2 = \ln 2 - \ln 3$	Raccogliamo la "x" a primo membro
$x(\ln 3 + \ln 2) = \ln 2 - \ln 3$	Dividiamo ambo i membri per $\ln 3 + \ln 2$
$x = \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 + \ln 2} = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln 6}$	La soluzione può essere scritta in forma equivalente ricordando che: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$
Otteniamo così la soluzione: $x = \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 + \ln 2}$	

15. Esercizio Guida

Risolvi la seguente equazione esponenziale



$$3^{2x} = 5 \cdot 2^x$$



In questo tipo di equazione le basi sono diverse e non è possibile renderle uguali, una variabile ausiliaria non risolve; quindi, ci serviremo dei logaritmi

$$3^{2x} = 5 \cdot 2^x$$

Calcoliamo il logaritmo naturale ($\ln$) di entrambi i membri

$$\ln 3^{2x} = \ln 5 \cdot 2^x$$

A secondo membro applichiamo il primo teorema sui logaritmi:
 $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$

$$\ln 3^{2x} = \ln 5 + \ln 2^x$$

Applichiamo, ad entrambi i membri, il terzo teorema sui logaritmi:
 $\log_a b^c = c \log_a b$

$$x \ln 3^2 = \ln 5 + x \ln 2$$

Portiamo a primo membro i termini con l'incognita



Si noti che a primo membro, nell'applicazione del terzo teorema, abbiamo portato davanti al logaritmo solo l'incognita x

$$x \ln 9 - x \ln 2 = \ln 5$$

Raccogliamo la " x " a primo membro

$$x(\ln 9 - \ln 2) = \ln 5$$

Dividiamo ambo i membri per $\ln 9 - \ln 2$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 9 - \ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln \frac{9}{2}}$$

La soluzione può essere scritta in forma equivalente ricordando che:
 $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

Otteniamo così la soluzione:

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 9 - \ln 2}$$

16. Esercizio Guida

Risolvi la seguente equazione esponenziale



$$3^{2x} - 3^{x+1} = -2$$



In questo tipo di equazione si utilizzeranno, inizialmente, le proprietà delle potenze, poi una variabile ausiliaria e infine si farà uso dei logaritmi

$$3^{2x} - 3^{x+1} = -2$$

Scriviamo 3^{x+1}
come $3^x \cdot 3$

$$3^{2x} - 3^x \cdot 3 + 2 = 0$$

Poniamo $3^x = t$
e quindi $3^{2x} = t^2$
Otteniamo così
un'equazione di secondo
grado che va risolta

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Calcoliamo il delta
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = 9 - 8 = 1$
Applichiamo la formula
risolutiva: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \quad t_1 = 1 \quad \text{e} \quad t_2 = 2$$

Una volta trovati i due valori
di t , utilizzando la posizione
iniziale bisogna trovare i
corrispondenti i valori di x e
verificare se sono accettabili

$$3^x = t_1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x_1 = 0$$

Accettabile

$$3^x = t_2 \rightarrow 3^x = 2 \rightarrow \ln 3^x = \ln 2$$

In questo caso non è
possibile riportare tutto alla
stessa base, per risolvere
l'equazione ci serviamo dei
logaritmi.
Calcoliamo il logaritmo
naturale ($\ln$) di entrambi i
membri

$$x \ln 3 = \ln 2 \rightarrow x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

A primo membro
appliciamo il terzo teorema
sui logaritmi:
 $\log_a b^c = c \log_a b$
Dividiamo entrambi i
membri per $\ln 3$

Si noti che entrambe le soluzioni sono accettabili



per trovare la seconda soluzione abbiamo calcolato ad entrambi i membri il logaritmo in base naturale ($\ln$), ma avremmo potuto scegliere una qualsiasi base, in questo caso poteva convenire di scegliere il logaritmo in base 3, vediamo perché:

$$3^x = 2 \rightarrow \log_3 3^x = \log_3 2 \rightarrow x \log_3 3 = \log_3 2$$

$$x_2 = \log_3 2$$

appliciamo sempre il terzo teorema sui logaritmi: ma per la definizione di logaritmo $\log_3 3 = 1$
Si ottiene quindi la seguente soluzione

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Si noti che le due soluzioni, apparentemente, diverse sono equivalenti in base alla formula del cambio di base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Otteniamo così le soluzioni:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

