

## Calcolo di aree e volumi

## indice

1. Calcolare l'**area** della parte di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dal grafico della funzione  $y = f(x)$  [pag. 2](#)
2. Calcolare l'**area** della parte di piano delimitata dal grafico delle funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  [pag. 5](#)
3. Calcolare il **volume** del solido generato dalla rotazione, attorno all'asse delle ascisse, del grafico della funzione  $y = f(x)$  [pag. 7](#)
4. Alcuni quesiti di esame di stato Liceo scientifico [pag. 8](#)

Gli esercizi sono proposti in ordine di difficoltà crescente.

**nota:** in un file così lungo e complesso può accadere che sia presente un errore di diversa natura nonostante gli esercizi siano stati controllati più volte. Saremo grati di ricevere segnalazioni di eventuali refusi o suggerimenti di qualsiasi natura.

1. calcolare l'area della parte di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dal grafico della funzione  $y = f(x)$  nell'intervallo indicato 

1	$y = -x^2 + x + 3$	$[0, 1]$	$\frac{19}{6}$
2	$y = -x^2 + 2x + 4$	$[0, 1]$	$\frac{14}{3}$
3	$y = x^3 - x + 2$	$[-1, 0]$	$\frac{9}{4}$
4	$y = x^3 - 8$	$[-1, 2]$	$\frac{111}{4}$
5	$y = -2x^4 + x + 2$	$[0, 1]$	$\frac{21}{10}$
6	$y = 2 - (x - 1)^3$	$[-1, 0]$	$\frac{23}{4}$
7	$y = \frac{x}{3 - x^2}$	$\left[1, \frac{3}{2}\right]$	$\frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$
8	$y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$	$[-1, 1]$	$\frac{\ln 3}{2}$
9	$y = \sqrt{x + 4}$	$[-1, 0]$	$\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$
10	$y = 2x\sqrt{4 - x^2}$	$[1, 2]$	$2\sqrt{3}$
11	$y = e^{3x}$	$[0, 1]$	$\frac{e^3 - 1}{3}$

12	$y = \ln x$	$[1, e]$	1
13	$y = \frac{e^x}{1 + e^x}$	$[0, 1]$	$\ln \frac{e+1}{2}$
14	$y =  1 - x^3 $	$[0, 1]$	$\frac{3}{4}$
15	$y = \ln x $	$[-e, -1]$	1
16	$y = x^2 e^{x^3}$	$[0, 1]$	$\frac{e-1}{3}$
17	$y = x \cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{\pi}{2} - 1$
18	$y = \sin^2 x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{\pi}{2}$
19	$y = -x^2 + 2x + 4$	$[-3, -2]$	$\frac{22}{3}$

20	$y = -x^2 + 2x + 4$	$[5, 6]$	$\frac{46}{3}$
21	$y = \ln x$	$\left[\frac{1}{e}, 1\right]$	$1 - \frac{2}{e}$
22	$y = xe^x$	$[-2, 0]$	$1 - \frac{3}{e^2}$
23	$y = x \ln x$	$\left[\frac{1}{e}, 1\right]$	$\frac{e^2 - 3}{4e^2}$
24	$y = \cos x$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	1
25	$y = -x^2 + 2x + 4$	$[3, 4]$	$\frac{20\sqrt{5} - 40}{3}$
26	$y = x^3 - 8$	$[0, 3]$	$\frac{81}{4}$
27	$y = x^2 - 4$	$[1, 4]$	$\frac{37}{3}$
28	$y = \frac{x-1}{x^2-4}$	$[-1, 1]$	$\frac{3}{4} \ln \frac{9}{7}$

29	$y = \frac{3x - 6}{x - 3}$	$\left[-1, \frac{5}{2}\right]$	$\frac{15}{2} - 3\ln 2$
30	$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	3

2. calcolare l'area della parte di piano delimitata dal grafico delle funzioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  nell'intervallo indicato 

31	$f(x) = -x^2 + 1$ $g(x) = x + 1$	$[-1, 0]$	$\frac{1}{6}$
32	$f(x) = x + 3$ $g(x) = x^4 + 3$	$[0, 1]$	$\frac{3}{10}$
33	$f(x) = -x^2 - 2x + 2$ $g(x) = x^2 - x + 1$	$\left[-1, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{9}{8}$
34	$f(x) = \frac{3x - 6}{x - 3}$ $g(x) = -\frac{2}{x}$	$[-2, -1]$	$3 - \ln \frac{125}{16}$
35	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^3$	$[0, 1]$	$\frac{5}{12}$
36	$f(x) = \sqrt{x + 3}$ $g(x) = 4x^2 - 1$	$[-1, 1]$	$\frac{14 - 4\sqrt{2}}{3}$

37	$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $g(x) = 4x^2 - 1$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$
38	$f(x) = -3x^2 - x + 1$ $g(x) = e^x$	$\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$	$\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$
39	$f(x) = \ln x$ $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$	$[1, 2]$	$2\ln 3 - 2$
40	$f(x) = \ln x$ $g(x) = e^x - e$	$[1, 2]$	$e^2 - 2e - \ln 4 + 1$
41	$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \ln x$	$\left[1, \frac{3}{2}\right]$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$
42	$f(x) = (e-2)x + 2$ $g(x) = e^x$	$[0, 1]$	$2 - \frac{e}{2}$
43	$f(x) = \sin x$ $g(x) = -\cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	2
44	$f(x) = \tan x$ $g(x) = \sin^2 x$	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	$\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

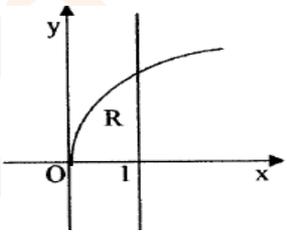
3. calcolare il **volume** del solido generato dalla rotazione, attorno all'asse delle ascisse, del grafico della funzione  $y = f(x)$  nell'intervallo indicato 

45	$y = x^2 + 1$	$[0,1]$	$\frac{28}{15}\pi$
46	$y = 2x^2 - 4x$	$\left[2, \frac{5}{2}\right]$	$\frac{113}{120}\pi$
47	$y = x^3 - 1$	$[1,2]$	$\frac{163}{14}\pi$
48	$y = 1 - x^3$	$[0,1]$	$\frac{9}{14}\pi$
49	$y = x^4$	$[0,1]$	$\frac{\pi}{9}$
50	$y = \frac{1}{x}$	$[1,2]$	$\frac{\pi}{2}$
51	$y = \frac{x^2 - 1}{2x}$	$\left[1, \frac{3}{2}\right]$	$\frac{\pi}{32}$
52	$y = \sqrt{x - 1}$	$[1,2]$	$\frac{\pi}{2}$
53	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1,1]$	$\frac{4}{3}\pi$
54	$y = \frac{4}{3}\sqrt{4 - x^2}$	$[1,2]$	$\frac{80}{27}\pi$

55	$y = x e^x$	$[0,1]$	$\frac{e^2 - 1}{4} \pi$
56	$y = \sin x$	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	$\frac{\pi(\pi - 2)}{8}$
57	$y = \sqrt{\ln x}$	$[1,2]$	$(\ln 4 - 1)\pi$
58	$y = \sqrt{\cos x}$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\pi$

## 4. alcuni quesiti di esame di stato di liceo scientifico



59	<p>Si consideri la regione delimitata da <math>y = \sqrt{x}</math> dall'asse <math>x</math> e dalla retta <math>x = 4</math> e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse <math>y</math></p> <p>(Quesito 10 ordinamento 2010)</p>	$\frac{128}{5} \pi$
60	 <p>La regione <math>R</math> delimitata dal grafico di <math>y = 2\sqrt{x}</math> dall'asse <math>x</math> e dalla retta <math>x = 1</math> è la base di un solido <math>S</math> le cui sezioni, ottenute tagliando <math>S</math> con piani perpendicolari all'asse <math>x</math>, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di <math>S</math></p> <p>(Quesito 1 ordinamento 2007)</p>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
61	<p>La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione <math>y = \ln x</math> e l'asse <math>x</math>, con <math>1 \leq x \leq e</math> è la base di un solido <math>S</math> le cui sezioni, ottenute tagliando <math>S</math> con piani perpendicolari all'asse <math>x</math>, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di <math>S</math> e se ne dia un valore approssimato a meno di <math>10^{-2}</math></p> <p>(Quesito 2 P.N.I.-2007)</p>	$3(e - 2)$

62	<p>Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle <math>x</math> della regione finita di piano delimitata dalla curva <math>y = \frac{2}{x}</math> e dalla retta di equazione <math>y = -x + 3</math></p> <p>(Quesito 1 suppletiva P.N.I. 2007)</p>	$\frac{1}{3}\pi$
63	<p>Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione <math>y = e^x</math>, dalla curva di equazione <math>y = x^3</math> e dalle rette <math>x = 0</math> e <math>x = 1</math></p> <p>(Quesito 8 suppletiva ordinamento 2007)</p>	$e - \frac{5}{4}$