

## corde e archi

1	Dimostra che, in ogni circonferenza, il diametro perpendicolare ad una corda dimezza gli archi sottesi.
2	In una circonferenza sono date due corde parallele condotte dagli estremi di un diametro; dimostra che le due corde sono congruenti.
3	Dimostra che due corde parallele di una circonferenza, individuano archi congruenti.
4	Dimostra che due corde sono congruenti se formano, con il diametro passante per il loro eventuale punto comune, angoli congruenti.
5	Nella circonferenza $\gamma$ considera due corde parallele $AB$ e $PQ$ con $P$ più vicino ad $A$ . Conduci da $A$ la parallela a $BP$ che incontra la circonferenza in $R$ . Dimostra che gli archi $RB$ e $BQ$ sono congruenti e che $\widehat{ROQ} \cong 4\widehat{ABP}$
6	I prolungamenti di due corde congruenti $AB$ e $CD$ di una circonferenza si incontrano nel punto $E$ esterno alla circonferenza. Dimostra che i segmenti $AE$ e $CE$ , $BE$ e $DE$ sono congruenti.
7	E' data la corda $PQ$ di una circonferenza, dagli estremi $P$ e $Q$ conduci due corde parallele $PA$ e $QB$ . Detto $C$ il punto di intersezione delle rette $PB$ e $AQ$ , dimostra che i triangoli $ACP$ e $BCQ$ sono isosceli.
8	In una circonferenza $\gamma$ è data una corda che non è un diametro; dimostra che ogni altra corda passante per il suo punto medio è maggiore di quella data.
9	Dimostra che le tangenti ad una circonferenza passanti per gli estremi di un diametro sono parallele. Inversamente, dimostra che due tangenti ad una circonferenza parallele tra loro toccano la circonferenza negli estremi di un diametro.
10	Considera due punti $P$ e $Q$ sulla retta $t$ tangente nel punto $T$ ad una circonferenza di centro $C$ in modo che valga $PC \cong QC$ ; dimostra che $P$ e $Q$ sono equidistanti da $T$ .
11	Sia $\gamma$ una circonferenza di diametro $AB$ . Siano $AB$ e $CD$ due corde parallele. Dimostra che la retta $CB$ passa per il centro $O$ della circonferenza.

12	Dimostra che due punti presi su una corda alla stessa distanza dal suo punto medio sono equidistanti dal centro.
13	Disegna due circonferenze di centro $O$ e $O'$ che si intersecano nei punti $C$ e $D$ . Congiungi $O$ con $O'$ e determina il punto medio $M$ del segmento $OO'$ . Traccia per il punto $C$ la retta perpendicolare a $CM$ che interseca le circonferenze nei punti $A$ e $B$ . Dimostra che $AC \cong CB$ .
14	Sia $\gamma$ una circonferenza e sia $r$ una retta che la interseca nei punti $A$ e $B$ . Sia $CD$ un diametro che non interseca la retta $r$ , traccia su di essa le proiezioni $P$ e $Q$ dei punti $C$ e $D$ . Dimostra che $PA \cong BQ$ .
15	Dato il diametro $AB$ e la corda $PQ$ di una stessa circonferenza. Dimostra che le proiezioni degli estremi del diametro sulla retta della corda sono equidistanti dal centro.
16	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ . Siano $AB$ e $BC$ due archi consecutivi della circonferenza e siano $M$ il punto medio dell'arco $AB$ e $N$ il punto medio dell'arco $BC$ . Traccia la corda $MN$ che interseca la corda $AB$ in $E$ e la corda $BC$ in $F$ . Dimostra che $BE \cong BF$ .
17	Dimostra che se una corda di una circonferenza è doppia della sua distanza dal centro, allora l'arco da essa sotteso è la quarta parte dell'intera circonferenza.
18	Dimostra che se due corde di una circonferenza si dimezzano scambievolmente, allora sono diametri di quella circonferenza.
19	Sia $AB$ una corda di una circonferenza $\gamma$ . Dimostra che la retta passante per il centro della circonferenza e per il punto medio $M$ della corda $AB$ è l'asse della corda stessa.
<b>posizioni relative di una retta con una circonferenza</b>	
20	Dal punto $P$ esterno ad una circonferenza di centro $O$ , conduci due secanti tali che $PO$ sia la bisettrice dell'angolo formato dalle due semirette. Dimostra che le corde intercettate sulle due secanti sono congruenti.

21	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ e siano $P$ e $Q$ due punti fuori di essa e equidistanti da $O$ . Tracciati i segmenti di tangente condotti da $P$ e da $Q$ alla circonferenza, dimostra che essi sono congruenti.
22	Da un punto $P$ esterno a una circonferenza di centro $O$ traccia due rette secanti, la prima che interseca la circonferenza in $A$ e $B$ , e la seconda in $C$ e $D$ . Dimostra che, se $AB \cong CD$ , allora la semiretta $PO$ è la bisettrice dell'angolo $\widehat{APD}$ .
23	Da un punto $P$ esterno a una circonferenza di centro $O$ traccia le due tangenti $PQ$ e $PR$ . Dimostra che $PO$ è perpendicolare a $QR$ .
24	Dimostra che, se le tangenti condotte dagli estremi di una corda $AB$ sono parallele, allora la corda $AB$ è un diametro.
25	Dimostra che l'angolo formato dalle due tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza è bisecato dalla retta passante per il punto dato e il centro.
26	Dimostra che due punti, appartenenti ad una tangente di una circonferenza e aventi distanze congruenti dal punto di contatto, sono equidistanti dal centro della circonferenza.
27	Sia $M$ il punto medio di un arco $AB$ di una circonferenza. Dimostra che la tangente in $M$ alla circonferenza è parallela alla retta $AB$ .
28	Sul prolungamento di un diametro $AB$ di una circonferenza, dalla parte di $B$ , considera il punto $C$ , tale che $BC$ sia congruente al raggio della circonferenza. Traccia da $C$ le tangenti alla circonferenza e indica con $D$ ed $E$ i punti di contatto. Dimostra che il triangolo $DCE$ è equilatero.
29	Siano date due circonferenze concentriche di centro $O$ . Da un punto $A$ esterno alle due circonferenze conduci le tangenti $AB$ e $AC$ alla circonferenza maggiore e poi le tangenti $AD$ e $AE$ a quella minore con $B$ e $D$ dalla stessa parte rispetto ad $AO$ . Dimostra che $\widehat{BAD} \cong \widehat{EAC}$ e che il quadrilatero $DBCE$ è un trapezio isoscele le cui diagonali si incontrano su $AO$ .

30	Date due circonferenze $\gamma$ e $\gamma'$ congruenti e secanti nei punti A e B. Dimostra che l'arco AB di $\gamma$ è congruente all'arco AB di $\gamma'$
31	Dimostra che se due circonferenze sono concentriche le corde del cerchio maggiore tangenti a quello minore sono tutte congruenti.
<b>posizioni relative di due circonferenze</b>	
32	Disegna due circonferenze tangenti esternamente. Per il punto di tangenza traccia una secante comune e, nei punti di intersezione di questa secante con le circonferenze, conduci le tangenti. Dimostra che le due tangenti non comuni sono parallele.
33	Considera due circonferenze di centri O e O' tangenti internamente in P. Traccia per P una retta secante s che intersechi la circonferenza minore in A e quella maggiore in B. Dimostra che O'A e OB sono paralleli.
34	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze di centri O e O' che si intersecano nei punti A e B. Traccia per il punto A una secante che interseca nuovamente le due circonferenze nei punti P e Q. Dette H e K le proiezioni di O e O' su tale secante, dimostra che $HK \cong \frac{1}{2}PQ$ .
35	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze concentriche e sia r una retta che le interseca entrambe, ordinatamente, nei punti A, B, C e D. Dimostra che $AB \cong CD$ . Dimostra, inoltre, che l'asse del segmento AD coincide con l'asse del segmento BC e che tale asse passa per il centro delle due circonferenze.
36	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Traccia per A e B le rette parallele a e b e siano C, D, E e F le intersezioni con le due circonferenze. Dimostra che EFDC è un parallelogramma.
37	Due circonferenze sono disegnate in modo tale che ognuna passa per il centro dell'altra. Dimostra che il quadrilatero che ha per vertici i centri delle due circonferenze e i loro punti di intersezione è un rombo.

38	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze tangenti esternamente a una retta $r$ , rispettivamente, in $A$ e in $B$ . Sia $A'$ il punto in cui il segmento $OO'$ interseca la circonferenza di centro $O$ e sia $B'$ il punto in cui il prolungamento di $OO'$ , dalla parte di $O'$ , incontra la circonferenza di centro $O'$ . Dimostra che $OA \parallel O'B$ ; che i due triangoli $OAA'$ e $O'BB'$ sono equiangoli. Dimostra che $AA' \parallel BB'$ .
39	Dimostra che l'angolo formato dalle rette che congiungono due vertici di un triangolo con il centro della circonferenza ad esso circoscritta misura il doppio del terzo angolo.
40	Siano $A\hat{V}B$ un angolo alla circonferenza e $VC$ la sua bisettrice. Conduci da $C$ la corda $CD$ parallela a $VB$ , dimostra che $CD \cong AV$ .
41	Da un punto $A$ di una circonferenza $\gamma$ traccia una corda $AB$ e la tangente $t$ . Sulla retta $t$ prendi un punto $C$ tale che $AC \cong AB$ . Dimostra che il segmento $CB$ interseca la circonferenza in un punto $D$ e che risulta $CD \cong AD$ .
42	In un triangolo inscritto in una circonferenza dimostra che l'angolo formato dalle rette che congiungono due vertici del triangolo con il centro della circonferenza è doppio del terzo angolo.
43	Due circonferenze di centri $O$ e $O'$ sono tangenti esternamente nel punto $T$ . Le due circonferenze sono tangenti a una retta $r$ in due punti $A$ e $B$ (diversi dal punto $T$ ). Dimostra che l'angolo $A\hat{T}B$ è retto.
44	Sono date le circonferenze $\gamma$ e $\gamma'$ di centri rispettivamente $O$ e $O'$ tangenti esternamente nel punto $T$ . Sia $s$ la tangente per $T$ e $r$ una retta tangente ad entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti $A$ e $A'$ ; Detto $H$ il punto d'intersezione di $r$ ed $s$ dimostra che il triangolo $OO'H$ è rettangolo.
45	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze tangenti esternamente in un punto $P$ . Conduci per il punto $P$ una secante che incontri le circonferenze rispettivamente nei punti $A$ e $A'$ . Dimostra che le due rette che congiungono questi due punti con i centri delle circonferenze $O$ e $O'$ cui appartengono sono rette parallele.

angoli alla circonferenza

46	Due archi AB e CD di una circonferenza sono congruenti e non hanno punti in comune. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un trapezio isoscele.
47	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro O e sia P un punto esterno a essa. Traccia una retta passante per il punto P e tangente alla circonferenza, indicando con A il punto di contatto. Traccia, inoltre, la retta PO che incontra la circonferenza in B e C (con B compreso fra P e C). Dimostra che $\widehat{APB} \cong \frac{1}{2}(\widehat{AOC} - \widehat{AOB})$ .
48	Sia $\widehat{AOB}$ un angolo al centro di una circonferenza di centro O e siano A e B due punti della circonferenza. Indicato con M il punto medio dell'arco su cui insiste l'angolo $\widehat{AOB}$ e tracciato il diametro BC, dimostra che i segmenti AC e OM sono paralleli.
49	Sia ABC un triangolo qualunque. Traccia le altezze AH e BK e dimostra che H e K sono punti della circonferenza di diametro AB. Nel caso in cui il triangolo ABC sia rettangolo in C, dove si trovano i punti H e K?
50	Su una circonferenza $\gamma$ di centro O si scelgano e si congiungano tre punti A, B, C ottenendo così un triangolo. Traccia l'asse del segmento AB che incontra l'arco non contenente C nel punto E. Congiungi il punto E con il punto C e dimostra che CE è bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ .
51	Sia AB la corda di una circonferenza $\gamma$ . Dimostra che se la corda AB è congruente al doppio della sua distanza al centro, allora l'arco AB da essa sotteso è un quarto della circonferenza.
<b>problemi di riepilogo</b>	
52	Sia $\gamma$ una circonferenza e siano $A, B \in \gamma$ . Siano P e Q i punti medi dei due archi individuati dai punti A e B. Dimostra che PQ è un diametro della circonferenza $\gamma$ .
53	Sia O un punto e t una retta non passante per O. Disegna due circonferenze con centro nel punto O, una che interseca la retta t nel punto A e nel punto B, l'altra nel punto C e nel punto D. Dimostra che i due triangoli ACO e BDO sono congruenti.
54	Nella semicirconferenza di diametro AB, sia PQ una corda parallela al diametro AB. Si dimostri che il quadrilatero ABPQ è un trapezio isoscele. Nel caso particolare in cui $PQ \cong \frac{AB}{2}$ , dimostra che anche i lati obliqui del trapezio ABPQ sono congruenti a $\frac{AB}{2}$ .

55	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ e diametro $AB$ . Prolunga il diametro di un segmento $BE$ congruente al raggio e traccia la tangente alla circonferenza in $B$ . Scegli su tale tangente un punto $V$ e disegna la tangente $VF$ alla circonferenza in $V$ . Dimostra che $\widehat{FVE} \cong 3\widehat{BVE}$ .
56	Disegna un angolo $\widehat{aPb}$ e una circonferenza $\gamma$ di centro $O$ tangente ai lati dell'angolo $\widehat{aPb}$ . Dimostra che $PO$ è la bisettrice dell'angolo $\widehat{aPb}$ . Detto $Q$ il punto di intersezione della circonferenza con il segmento $PO$ , si tracci per $Q$ la perpendicolare a $PO$ che interseca i lati dell'angolo nei punti $A$ e $B$ . Dimostra che il triangolo $APB$ è isoscele.
57	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ e siano $A$ e $B$ due suoi punti non allineati con $O$ . Si prendano due punti $P$ e $Q$ , sulle semirette $OA$ e $OB$ , tali che $OP \cong OQ$ . Dimostra che le rette $AB$ e $PQ$ sono tra loro parallele.
58	Due circonferenze congruenti di centri $O$ e $O'$ sono tangenti esternamente nel punto $T$ . La corda $AT$ della circonferenza di centro $O$ è perpendicolare alla corda $BT$ della circonferenza di centro $O'$ . Dimostra che i segmenti $OA$ e $O'B$ sono paralleli. Dimostra che il quadrilatero $AOO'B$ è un parallelogramma.
59	Siano $AB$ e $CD$ due diametri perpendicolari di una circonferenza $\gamma$ . Dimostra che il quadrilatero che ha per estremi i vertici dei due diametri è un quadrato.
60	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze secanti di centri $O$ e $O'$ . Traccia una retta perpendicolare a $OO'$ in modo che questa incontri la circonferenza $\gamma$ in $A$ e in $D$ e la circonferenza $\gamma'$ in $B$ e in $C$ e $OO'$ in $H$ . Dimostra che $AB \cong CD$ .
61	Siano $\gamma$ e $\gamma'$ due circonferenze congruenti di centro $O$ e $O'$ che si intersecano nei punti $A$ e $B$ . Per il punto $A$ traccia una secante $s$ che incontra le due circonferenze in $C$ e in $D$ . Dimostra che il triangolo $CBD$ è isoscele.
62	Siano $OA$ e $OB$ due segmenti congruenti e adiacenti. Traccia le due circonferenze di centro $O$ e raggi rispettivamente $OA$ e $OB$ . Conduci per $A$ la retta tangente alla circonferenza di raggio $OA$ . Detti $C$ e $D$ i suoi punti di intersezione con la circonferenza di raggio $OB$ , dimostra che il quadrilatero $OCBD$ è un rombo.

63	Siano $A$ e $B$ i punti di intersezione di due circonferenze secanti. Siano $AP$ e $AQ$ i diametri delle due circonferenze aventi un estremo in $A$ . Dimostra che i punti $P$ , $B$ e $Q$ sono allineati.
64	Dato il triangolo $ABC$ , conduci la parallela al lato $BC$ che incontra i lati $AB$ e $AC$ rispettivamente in $P$ e $Q$ in modo che la circonferenza $APQ$ sia tangente al lato $BC$ nel punto $D$ . Dimostra che il triangolo $PQD$ è isoscele e che $AD$ è bisettrice dell'angolo in $A$ .
65	Sono date due circonferenze di diametri $AB$ e $CD$ paralleli e congruenti. Dimostra che se le due circonferenze sono secanti e il quadrilatero di vertici $A$ , $B$ , $C$ e $D$ è un rettangolo, il lato $BC$ è minore del lato $AB$ .
66	Due circonferenze congruenti sono secanti nei punti $A$ e $B$ . Dimostra che gli archi delimitati da tali punti su una circonferenza sono congruenti agli archi delimitati dagli stessi punti sull'altra.
67	Siano $AB$ e $AC$ due corde di una circonferenza $\gamma$ di centro $O$ , situate da parti opposte rispetto al diametro $AE$ . Indica con $F$ il punto medio della corda $AB$ , con $G$ il punto medio della corda $AC$ e con $H$ il punto medio di $AO$ . Dimostra che $HG \cong HF$ .
68	Data una circonferenza $\gamma$ di centro $O$ , traccia le tangenti da un punto esterno $P$ . Siano $A$ e $B$ i punti di contatto e $M$ il punto medio del minore dei due archi $AB$ . Dimostra che la semiretta $AM$ è bisettrice di $\widehat{PAB}$ e che la semiretta $BM$ è la bisettrice di $\widehat{ABP}$ .
69	Dimostra che le semirette bisettrici degli angoli di un triangolo dimezzano gli archi determinati dai vertici del triangolo sulla circonferenza circoscritta.
70	Disegna una circonferenza $\gamma$ circoscritta ad un triangolo $ABC$ qualsiasi. Sia $D$ il punto medio dell'arco $BC$ che non contiene $A$ . Dimostra che $AD$ è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ .
71	Sia data una semicirconferenza di diametro $AB$ e centro $O$ . Traccia da $A$ e $B$ le tangenti alla semicirconferenza e indica rispettivamente con $M$ e $N$ le intersezioni con una tangente in un punto $C$ dell'arco $AB$ . Dimostra che il triangolo $MON$ è rettangolo.

72	Sia ABC un triangolo e sia $\gamma$ la circonferenza circoscritta ad esso. L'asse del lato BC incontra l'arco BC non contenente A nel punto D. Dimostra che AD è la bisettrice dell'angolo in $\widehat{A}$ .
73	Sia data una circonferenza $\gamma$ e un triangolo equilatero ABC inscritto in essa. Sia P un punto qualsiasi dell'arco CB non contenente il vertice A. Congiungi il punto P con i punti A, B e C e prendi su PA un segmento $PD \cong PB$ . Dimostra che il triangolo PDB è ancora un triangolo equilatero e che i triangoli PBC e DBA sono congruenti.
74	I punti P e Q dividono la semicirconferenza di diametro AB in tre archi congruenti. Sulla retta AP considera il segmento PD congruente al raggio e sulla retta AQ il segmento QC congruente ad AQ. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rombo.
75	Due circonferenze $\gamma$ e $\gamma'$ sono secanti nei punti A e B. La tangente in A a $\gamma$ interseca ulteriormente $\gamma'$ in Q mentre la tangente in A a $\gamma'$ interseca $\gamma$ in P. Dimostra che i triangoli ABP e ABQ hanno gli angoli congruenti.
76	Date due circonferenze congruenti $\gamma$ e $\gamma'$ secanti nei punti A e B. La tangente a $\gamma'$ in A interseca ulteriormente $\gamma$ nel punto P e la tangente a $\gamma$ in A interseca ulteriormente $\gamma'$ in Q. Dimostra che AB è asse del segmento PQ.