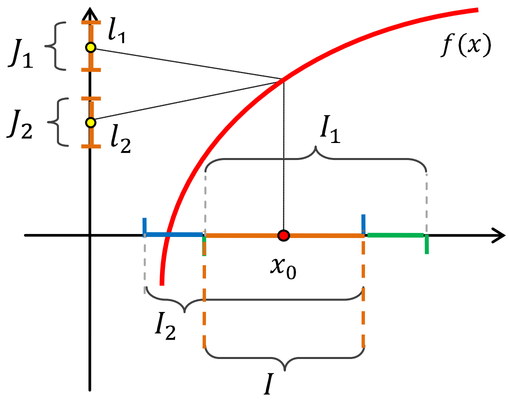
Teorema dell'unicità del limite

enunciato



Se una funzione $f(x)$ è dotata di limite l in un punto x_0 allora il limite è unico

Hp: $f(x)$ è una funzione

esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Th: l è unico

dimostrazione

Il teorema si dimostra *per assurdo*, cioè si nega la tesi ottenendo una affermazione non vera

$l_1 \neq l_2$	supponiamo per assurdo che la funzione $f(x)$ abbia in x_0 due limiti finiti e distinti
$J_1 \cap J_2 = \emptyset$	consideriamo l'intorno J_1 di l_1 e l'intorno J_2 di l_2 e siano essi disgiunti
in corrispondenza di J_1 $\exists$ I_1 di x_0 : $\forall x \in (I_1 \cap D) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in J_1$	applichiamo la definizione di limite ad l_1
in corrispondenza di J_2 $\exists$ I_2 di x_0 : $\forall x \in (I_2 \cap D) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in J_2$	applichiamo la definizione di limite ad l_2
$I = I_1 \cap I_2$	consideriamo ora l'intorno I di x_0 formato dai punti comuni di I_1 e di I_2
$\forall x \in (\mathrm{I} \cap D) - \{x_0\} \Rightarrow$ $f(x) \in J_1$ ed $f(x) \in J_2$	poichè tutti i punti di I (escluso il punto x_0) appartengono sia ad I_1 che ad I_2, allora per ogni x che appartiene ad I si ha che $f(x)$ appartiene a J_1 ed appartiene a J_2
$f(x)$ è una funzione per ipotesi	ciò significa che ogni punto x di I escluso il punto x_0 ha due ordinate diverse il che non è possibile perché $f(x)$ è una funzione cioè ad ogni x deve corrispondere una ed una sola ordinata
$\boldsymbol{l_1 = l_2}$	quindi è assurdo che la funzione $f(x)$ abbia in x_0 due limiti distinti e può solo essere che il limite è unico

osservazione

Il teorema è stato dimostrato nel caso in cui x_0 ed l siano entrambi finiti ma è valido anche negli altri casi