Elementi di topologia della retta

nome	definizione

insieme

l'insieme è un concetto primitivo che si accetta come intuitivamente noto secondo George Cantor, il padre della teoria degli insiemi:

"Per insieme si intende un raggruppamento, concepito come un tutto, di oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero"

esempi

$A = \{ a, b, c, d \}$ $\quad B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ $\quad C = \{1, 2, 3 \} \cup \{ 6 \}$

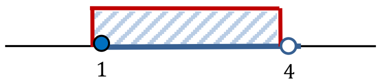
$D = (1, 5]$ $\quad E = 1 < x < 5$ $\quad F = \emptyset$

intervallo

un intervallo è l'insieme di **tutti** i valori compresi tra due estremi (finiti o infiniti)

esempi

l'insieme $[1, 4)$ è un intervallo perché contiene tutti i numeri compresi tra 1 e 4



fai attenzione che un intervallo è anche un insieme ma non è detto che un insieme sia un intervallo. Ad esempio l'insieme: $\{1, 2, 3, 4\}$ non è un intervallo perché contiene solo i quattro numeri indicati e non tutti i numeri tra 1 e 4

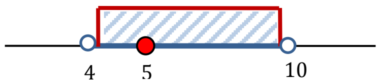
intorno completo di un punto

l'intorno completo di un punto è un qualsiasi intervallo **aperto** che contiene il punto

esempi

dato il punto $x_0 = 5$

l'intervallo $(4, 10)$ è un intorno completo di 5



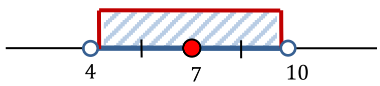
intorno circolare di un punto

l'intorno circolare di un punto è un intervallo aperto di **centro** il punto stesso

esempi

dato il punto $x_0 = 7$

l'intervallo $(4, 10)$ è un intorno circolare di 7



la parte $(4, 7)$ si chiama intorno sinistro di 7

la parte $(7, 10)$ si chiama intorno destro di 7

minimo di un insieme

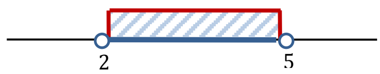
il minimo di un insieme A, se esiste è l'elemento **più piccolo appartenente** all'insieme.

in simboli: m è il minimo di A se $\begin{cases} m \leq x \quad \forall x \in A \\ m \in A \end{cases}$

esempi

dato l'insieme $[2, 5)$ il minimo è 2

dato l'insieme $(2, 5)$ il minimo *non esiste*



osserva che il minimo di un insieme esiste solo se l'insieme è chiuso inferiormente

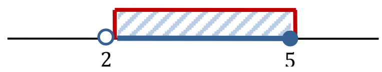
massimo di un insieme

il massimo di un insieme A, se esiste, è l'elemento **più grande appartenente** all'insieme.

in simboli: M è il massimo di A se $\begin{cases} M \geq x \quad \forall\, x \in A \\ M \in A \end{cases}$

esempi

dato l'insieme $(\,2, 5\,]$ il massimo è 5



dato l'insieme $(\,2, 5\,)$ il massimo *non esiste*

osserva che il massimo di un insieme esiste solo se l' insieme è chiuso superiormente

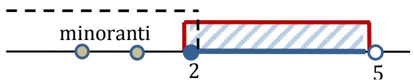
minorante di un insieme

un minorante di un insieme è un qualsiasi elemento **minore o uguale** di tutti gli elementi dell'insieme.

il minorante non deve necessariamente appartenere all'insieme e, se esiste, non è unico

esempi

dato l'insieme $[\,2, 5\,)$ $2, 1, 0$ ... sono minoranti



dato l'insieme $[\,2, 5\,)$ l'insieme dei minoranti è l'intervallo $(-\infty\,, 2\,]$

dato l'insieme $(\,2, 5\,)$ l'insieme dei minoranti è sempre l'intervallo $(-\infty\,, 2\,]$

Osserva che l'insieme dei minoranti, se non è vuoto, è sempre chiuso superiormente

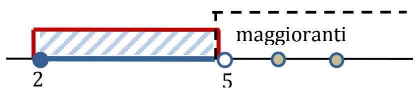
maggiorante di un insieme

un maggiorante di un insieme è un qualsiasi elemento **maggiore o uguale** di tutti gli elementi dell'insieme.

Il maggiorante non deve necessariamente appartenere all'insieme e, se esiste, non è unico

esempi

dato l'insieme $[2, 5\,)$ $5, 6, 7$... sono maggioranti



dato l'insieme $[\,2, 5\,)$ l'insieme dei maggioranti è l'intervallo $[\,5\,, +\infty\,)$

dato l'insieme $[\,2, 5\,]$ l'insieme dei maggioranti è sempre l'intervallo $[\,5\,, +\infty\,)$

osserva che l'insieme dei maggioranti, se non è vuoto, è sempre chiuso inferiormente

estremo inferiore di un insieme

l'estremo inferiore di un insieme limitato inferiormente è il **massimo dei minoranti** dell'insieme stesso e si indica con il simbolo ***inf (A)***

esempi

dato l'insieme $A = (\,2, 5\,]$ l'estremo inferiore di A è **2** in simboli: $inf\,(A) = \mathbf{2}$

infatti l'insieme dei minoranti di A è $(-\infty\,, 2\,]$ il cui massimo è **2**

⚠ se l'insieme non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore è $-\infty$

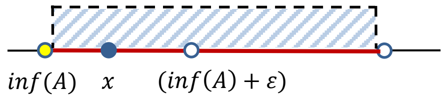
B $= (-\infty, 5\,]$ $inf\,(B) = -\infty$ C $= (\,1, 4\,]$ $inf\,(C) = \mathbf{1}$ D $= [\,1, 4\,]$ $inf\,(D) = \mathbf{1}$

Elementi di topologia della retta

proprietà

dato un A insieme **limitato** inferiormente l'estremo inferiore $inf(A)$ gode delle seguenti due proprietà:

1. $inf(A) \leq x \quad \forall\, x \in A$
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in A \; : \; x < (\, inf(A) + \varepsilon \,)$



estremo superiore di un insieme

l'estremo superiore di un insieme limitato superiormente è il **minimo dei maggioranti** dell'insieme stesso e si indica con il simbolo ***sup (A)***

esempi

dato l'insieme $A = (2, 5)$ l'estremo superiore di A è **5** in simboli: $sup(A) = \mathbf{5}$

infatti l'insieme dei maggioranti di A è $[\, 5, +\infty \,)$ il cui minimo è **5**

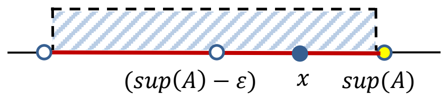
⚠ se l'insieme non è limitato superiormente, l'estremo superiore è $+\infty$

$B = (3, +\infty)$ $sup(B) = +\infty$ $\quad C = (\, 3, 7 \,]$ $sup(C) = \mathbf{7}$ $\quad D = (\, 3, 7 \,)$ $sup(D) = \mathbf{7}$

proprietà

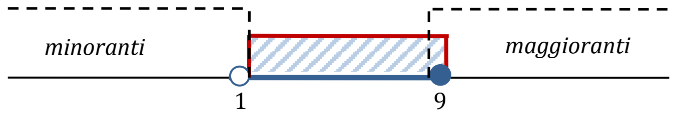
dato un insieme A **limitato** superiormente l'estremo superiore $sup\ (A)$ gode delle seguenti due proprietà:

1. $sup(A) \geq x \quad \forall\, x \in A$
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \boldsymbol{x} \in A \; : \; x > (\, sup(A) - \varepsilon \,)$



esempi di riepilogo

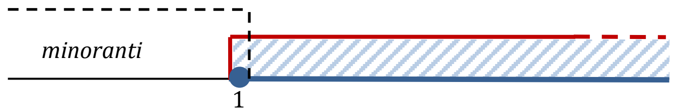
dato l'insieme $A = (1, 9\,]$ si ha che:



- A è un intervallo limitato
- A è aperto inferiormente e chiuso superiormente
- il minimo di A non esiste, il massimo di A è 9

- l'insieme dei minoranti di A è l'intervallo $(-\infty,\ 1\,]$
- l'insieme dei maggioranti di A è l'intervallo $[\,9,\ +\infty\,)$
- l'estremo inferiore di A è 1, l'estremo superiore è 9

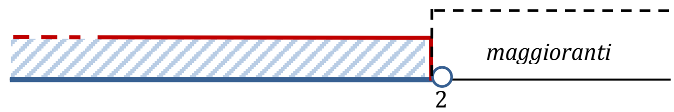
dato l'insieme $B = [\,1, +\infty)$ si ha che:



- B è un intervallo non limitato superiormente
- B è chiuso inferiormente e aperto superiormente
- il minimo di B è 1, il massimo di B non esiste

- l'insieme dei minoranti di B è l'intervallo $(-\infty,\ 1\,]$
- l'insieme dei maggioranti di B è vuoto
- l'estremo inferiore di B è 1, l'estremo superiore è $+\infty$

dato l'insieme $C = (-\infty, 2\,)$ si ha che:



- C è un intervallo non limitato inferiormente
- C è aperto inferiormente e superiormente
- il minimo e il massimo di C non esistono

- l'insieme dei minoranti di C è vuoto
- l'insieme dei maggioranti di C è l'intervallo $[2, +\infty)$
- l'estremo inferiore di C è $-\infty$, l'estremo superiore è 2

punto di accumulazione per un insieme

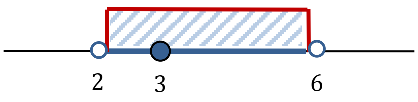
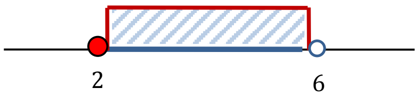
un punto x_0 si dice di accumulazione per un insieme **A** se **ogni** intorno del punto contiene **almeno** un elemento dell'insieme **A** **distinto** dal punto stesso

fai attenzione che:

- l'appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto sia di accumulazione per l'insieme
- la **non** appartenenza del punto all'insieme **non** implica che il punto **non** sia di accumulazione per l'insieme

i successivi esempi illustrano i quattro possibili casi

esempi

x_0 appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 3$ ed $A = (\ 2, 6\ )$ 3 appartiene ad A ed è di accumulazione per A	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 2$ ed $A = (\ 2, 6\ )$ 2 non appartiene ad A ed è di accumulazione per A	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = (\ 2, 6\ )$ 1 non appartiene ad A ma non è di accumulazione per A	
x_0 appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = \{1\} \cup (\ 2, 6\ )$ 1 appartiene ad A ma non è di accumulazione per A	

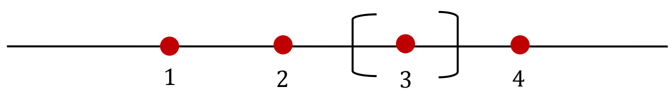
un punto che appartiene ad un insieme ma non è di accumulazione per l'insieme stesso si dice **punto isolato**

sia A un insieme / A⊆R l'insieme dei suoi punti di accumulazione si chiama il derivato di A e si indica con **Dr(A)**

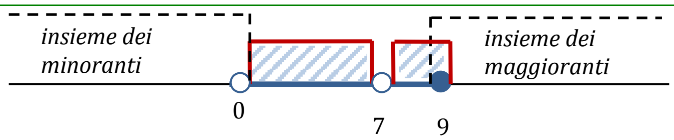
si dimostra che: $-\infty$ è di accumulazione per un insieme se e solo se l'insieme **non** è limitato inferiormente e che $+\infty$ è di accumulazione per un insieme se e solo se l'insieme **non** è limitato superiormente

ulteriori esempi

dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ nessuno dei quattro elementi di A è un punto di accumulazione per A. Infatti, scelto ad esempio l'elemento 3, esiste un suo intorno $(\ 2{,}5\ ,\ 3{,}5\ )$ che non contiene alcun elemento di A distinto da 3 stesso. Analoga conclusione per gli altri tre elementi di A



dato l'insieme $B = (0, 7) \cup (7, 9]$ si ha che



- il minimo di B non esiste, il massimo di B è 9
- l'insieme dei minoranti di B è $(\ -\infty,\ 0]$
- l'insieme dei maggioranti di B è $[\ 9, +\infty)$
- l'estremo inferiore di B è 0
- l'estremo superiore di B è 9
- 0 7 e 9 sono di accumulazione per B
- tutti i numeri tra 0 e 9 sono punti di accumulazione per l'insieme B
- il derivato di B **Dr(B)** = $[\ 0, 9\ ]$