Definizione di limite di una funzione in un punto

PASSED

premessa

considerata una funzione $y = f(x)$

- sia **D** il suo dominio
- sia $\boldsymbol{x_0}$ un punto di accumulazione per D

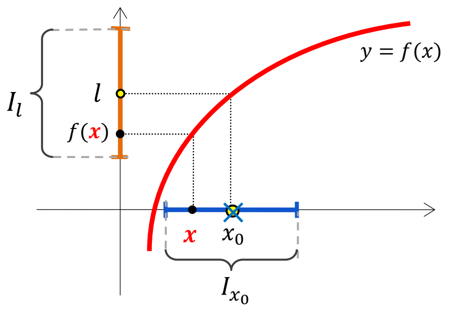
si dice che $\boldsymbol{l}$ **è il limite per** $\boldsymbol{x}$ **che tende a** $\boldsymbol{x_0}$ **di** $\boldsymbol{f(x)}$:

e si scrive $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$ se:

definizione topologica

- per ogni intorno $\boldsymbol{I}$ *di* $\boldsymbol{l}$
- esiste un intorno $\boldsymbol{I}$ *di* $\boldsymbol{x_0}$
- tale che per ogni x :
  - appartenente all'intorno $\boldsymbol{I}$ *di* $\boldsymbol{x_0}$
  - appartenente al dominio **D**
  - diverso dal punto $\boldsymbol{x_0}$
- si ha che $f(x)$ appartiene all'intorno $\boldsymbol{I}$ *di* $\boldsymbol{l}$

definizione topologica o insiemistica

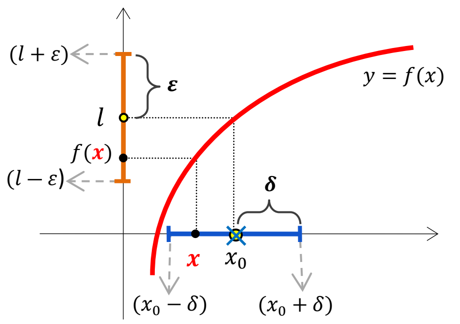


$$\forall\, I_l \quad \exists\, I_{x_0} : \quad \forall x \in (I_{x_0} \cap D) - \{x_0\} \;\Rightarrow\; f(x) \in I_l$$

La definizione insiemistica di limite di una funzione in un punto è una definizione generale. Essa è infatti valida per ogni valore finito o infinito di x_0 e di l.

La lettura di tale definizione è riportata nel riquadro "definizione topologica" in alto a destra

definizione algebrica



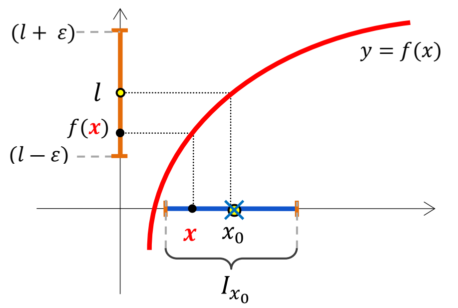
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \; \forall x \in D : 0 \neq |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

La definizione algebrica di limite è una "traduzione" di quella insiemistica, quella qui sopra riportata si riferisce al caso in cui x_0 ed l sono numeri.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ *e* $\boldsymbol{\delta}$ rappresentano numeri positivi molto piccoli, in particolare:

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta il raggio dell'intorno $\boldsymbol{J}$ *di centro* $\boldsymbol{l}$ i cui estremi sono "$(l - \varepsilon)$" ed "$(l + \varepsilon)$"
- $\boldsymbol{\delta}$ rappresenta il raggio dell'intorno $\boldsymbol{I}$ di centro $\boldsymbol{x_0}$ i cui estremi sono "$(x_0 - \delta)$" ed "$(x_0 + \delta)$"

definizione mista



$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_{x_0} : \forall x \in (I_{x_0} \cap D) - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

La definizione mista di limite è una "composizione" delle due precedenti definizioni. In particolare essa prende la prima e l'ultima parte dalla definizione algebrica (che fa riferimento all'asse delle y) e prende la parte centrale dalla definizione topologica (che fa riferimento all'asse delle x).

La definizione qui sopra riportata si riferisce al caso in cui x_0 ed l sono numeri.

osservazione importante

L'esistenza del limite di una funzione in un punto x_0 è **indipendente** dal comportamento della funzione nel punto x_0 stesso. Può infatti accadere che:

- nel punto x_0 esiste il limite $\boldsymbol{l}$ della funzione, esiste il valore della funzione $f(x_0)$ e sono uguali $l = f(x_0)$
- nel punto x_0 esiste il limite $\boldsymbol{l}$ della funzione, esiste il valore della funzione $f(x_0)$ ma sono diversi $l \neq f(x_0)$
- nel punto x_0 esiste il limite $\boldsymbol{l}$ della funzione ma non esiste il valore della funzione $f(x_0)$