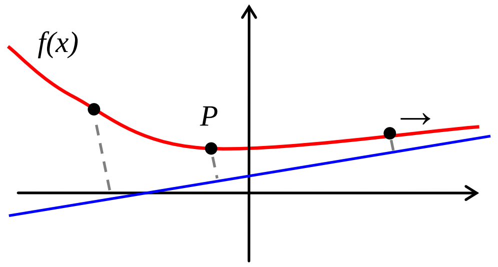
Asintoti di una funzione

definizione di asintoto di una funzione



- data una funzione $f(x)$
- e dato un suo punto P

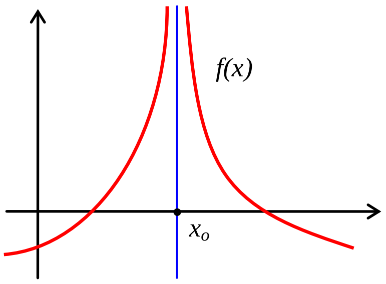
si dice che una retta è **asintoto** per la funzione $f(x)$ se

la distanza di P dalla retta tende a zero quando P si allontana indefinitamente lungo la funzione

la definizione non esclude che in alcuni casi la funzione può intersecare l'asintoto.
Vedi in seguito per l'approfondimento

Esistono tre tipi di asintoti: asintoto verticale, asintoto orizzontale, asintoto obliquo

asintoto verticale $\boldsymbol{x = x_0}$



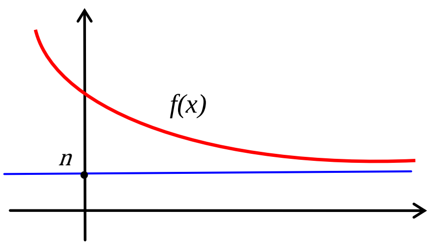
dove si cerca:
- nei punti $\boldsymbol{x_0}$ di discontinuità della funzione
- nei punti agli estremi del dominio di $f(x)$ se sono finiti e non appartenenti al dominio stesso

come si cerca:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} n \ finito & \to \ l'asintoto \ Non \ Esiste \\ \pm\infty & \to \ Esiste \ \to \ \boldsymbol{x = x_0} \end{cases}$$

osserva: la funzione non attraversa mai l'asintoto verticale perché x_0 **non** appartiene al dominio della funzione

asintoto orizzontale $\boldsymbol{y = n}$



dove si cerca:
- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente

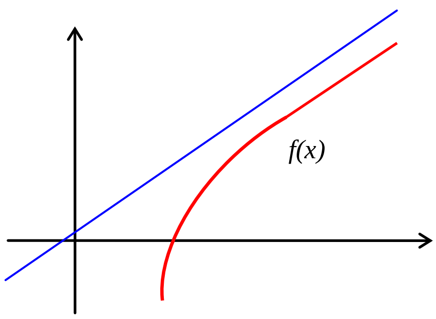
come si cerca:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \to \ l'asintoto \ Non \ Esiste \\ n \ finito & \to \ Esiste \ \to \ \boldsymbol{y = n} \end{cases}$$

- solo se l'asintoto orizzontale non esiste, si cerca l'asintoto obliquo

fai attenzione che per $+\infty$ e per $-\infty$ vanno fatte ricerche separate, ad esempio a $+\infty$ potrebbe esistere l'asintoto orizzontale ed a $-\infty$ potrebbe esistere l'asintoto obliquo

asintoto obliquo $\boldsymbol{y = mx + q}$



dove si cerca:
- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente e se non esiste già l'asintoto orizzontale

come si cerca:

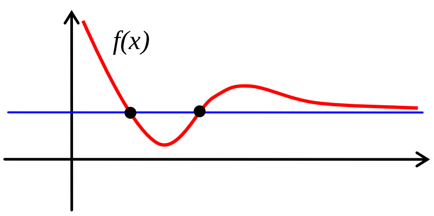
$$\boldsymbol{m} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \begin{cases} \pm\infty & \to \ l'asintoto \ Non \ Esiste \\ 0 & \to \ l'asintoto \ Non \ Esiste \\ m \ finito & \to \ si \ cerca \ q \end{cases}$$

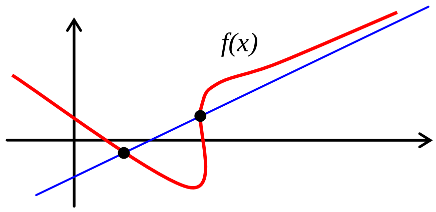
$$\boldsymbol{q} = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \begin{cases} \pm\infty & \to l'asintoto \ Non \ Esiste \\ q \ finito \to Esiste \to \boldsymbol{y = mx + q} \end{cases}$$

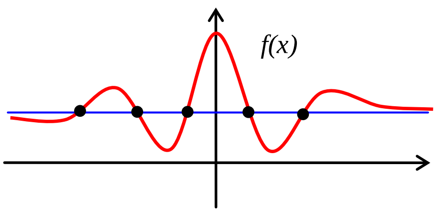
Asintoti di una funzione

osservazioni

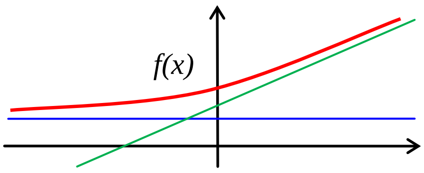
- la funzione può intersecare l'asintoto orizzontale e l'asintoto obliquo anche più volte, come si vede nei seguenti esempi:



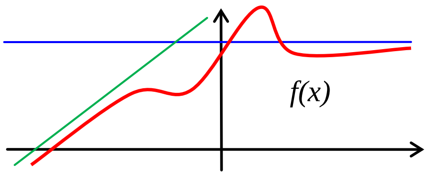




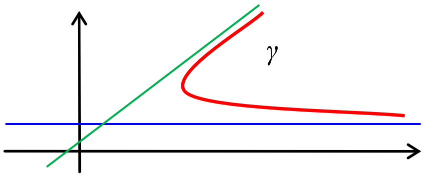
- la presenza dell'asintoto orizzontale esclude l'asintoto obliquo. Esistono però funzioni che ammettono l'**asintoto orizzontale a** $-\infty$ e l'**asintoto obliquo a** $+\infty$ (e viceversa), come si vede nei seguenti grafici:



la funzione ammette l'asintoto orizzontale a $-\infty$ e l'asintoto obliquo a $+\infty$



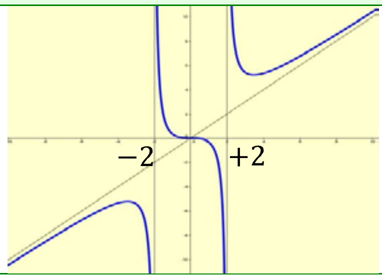
la funzione ammette l'asintoto orizzontale a $+\infty$ e l'asintoto obliquo a $-\infty$



la curva ammette un asintoto orizzontale ed uno obliquo nella stessa direzione perché **non è una funzione**

esempio di ricerca di asintoti di una funzione

Cerchiamo gli eventuali asintoti della funzione $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}}$



• ricerca degli asintoti verticali	si calcola il limite sinistro e destro della funzione per x che tende ai punti di discontinuità della funzione: $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x=-2$ entrambi i limiti sono infiniti e la retta $x=-2$ è un asintoto verticale per la funzione $\lim\limits_{x\to+2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x=+2$ entrambi i limiti sono infiniti e la retta $x=+2$ è un asintoto verticale per la funzione
• ricerca degli asintoti orizzontali	si calcola il limite della funzione per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty$ $\Rightarrow$ l'asintoto non esiste entrambi i limiti sono infiniti e non esiste asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$ per la funzione. Ha senso cercare l'asintoto obliquo
• ricerca degli asintoti obliqui	si calcolano i valori del coefficiente angolare m e dell'ordinata all'origine q dell'equazione $y = mx + q$ dell'asintoto obliquo : $\boldsymbol{m} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ e $\boldsymbol{q} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} - x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x$

la funzione ammette due asintoti verticali ed un asintoto obliquo, come riportato nel grafico della funzione in alto a destra. Osserva che la funzione interseca l'asintoto obliquo nell'origine degli assi cartesiani