Teorema di Cauchy

enunciato

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni: • continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ • derivabili nei punti interni dell'intervallo (a,b) • e inoltre $g'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ in ogni punto interno dell'intervallo (a,b) **allora** esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ interno all'intervallo (a,b) tale che: $$\frac{\boldsymbol{f'(c)}}{\boldsymbol{g'(c)}} = \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{g(b)-g(a)}}$$	il teorema è detto degli **incrementi finiti** e si può enunciare anche dicendo: se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ verificano le ipotesi indicate, in un opportuno punto **c** dell'intervallo (a,b) il rapporto tra le rispettive derivate in c è uguale al rapporto tra gli **incrementi** delle funzioni calcolate agli estremi a e b dell'intervallo $[a,b]$

dimostrazione

Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x)$ tale che $\varphi(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$

Osserviamo che:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono per ipotesi funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili nei punti interni di (a,b)
- $[f(b) - f(a)]$ e $[g(b) - g(a)]$ sono costanti e quindi sono continue e derivabili in tutto $\mathcal{R}$

Verifichiamo che $\varphi(x)$ soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle:

1. $\varphi(x)$ è continua in $[a,b]$ perché è una combinazione lineare di funzioni continue in $[a,b]$
2. $\varphi(x)$ è derivabile nei punti interni di (a,b) perché è una combinazione lineare di funzioni derivabili in (a,b)
3. calcoliamo $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ cioè:

$\varphi(a) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b)$

$\varphi(b) = [f(b) - f(a)] \cdot g(a) - [g(b) - g(a)] \cdot f(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b)$

quindi $\varphi(a) = \varphi(b)$

Applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $\varphi(x)$ si ha che:	esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ interno all'intervallo (a, b) tale che $\boldsymbol{\varphi'(c) = 0}$
Calcoliamo la derivata prima di $\varphi(x)$:	$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$
Calcoliamo la derivata di $\varphi(x)$ nel punto $\boldsymbol{c}$ e poniamola uguale a zero:	$\varphi'(\boldsymbol{c}) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$
Il che significa:	$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$
Portiamo il primo termine al secondo membro e cambiamo il segno ad entrambi i membri:	$[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$
Dividendo entrambi i membri per: $[g(b) - g(a)] \cdot g'(c)$ si ottiene la tesi del teorema.	$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$