Sviluppo in serie di funzioni elementari

sviluppo in serie di Taylor

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

- **f(x)** è una funzione derivabile almeno **n** volte in $\boldsymbol{x_0}$
- $\boldsymbol{o((x-x_0)^n)}$ è detto resto di Peano e si legge: o piccolo di $(x-x_0)^n$
- o piccolo è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$, cioè: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0$

algebra degli o piccoli: per $\boldsymbol{x\to 0}$ si ha:

$o(x^m)\pm o(x^m)=o(x^m)$	$o(x^m)+o(x^n)=o\left(x^{\boldsymbol{min}\{m,n\}}\right)$	$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$	$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$

se $x_0=0$ si ha lo sviluppo in serie di Mac Laurin

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}\,(x)^n+o(x^n)$$

sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	
$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}\,x^n+o(x^n)$	funzione potenza con $\alpha\in\mathbb{R}$
$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,x^{n+1}+o(x^{n+1})$	funzione radice quadrata
$a^x=1+x\,ln\,a+\frac{x^2}{2}ln^2a+\frac{x^3}{3!}ln^3a+\cdots+\frac{x^n}{n!}ln^na+o(x^n)$	funzione esponenziale con base a
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$	funzione esponenziale con base e
$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$	funzione logaritmo in base e
$senx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$	funzione seno
$cosx=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$	funzione coseno
$tgx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+o(x^{10})$	funzione tangente
$cotgx=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2}{945}x^5+o(x^6)$	funzione cotangente
$secx=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7)$	funzione secante
$cosecx=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+o(x^6)$	funzione cosecante
$arcsenx=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{(2n)!}{4^n\,(n^2)!\,(2n+1)}\,x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$	funzione arcoseno
$arccosx=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5-\cdots-\frac{(2n)!}{4^n\,(n^2)!\,(2n+1)}\,x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$	funzione arcocoseno
$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	funzione arcotangente
$arccotgx=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots-(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$	funzione arcocotangente