Formula di integrazione per parti

PASSED

enunciato

Se due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono:

derivabili con derivata continua in un intervallo I

allora: $\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$

dove $f'(x)$ viene detto fattore differenziale e $g(x)$ viene detto fattore finito

dimostrazione

Consideriamo la formula di derivazione del prodotto:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Per la proprietà commutativa dell'addizione si ha:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Calcoliamo ad entrambi i membri l'integrale indefinito:

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\, dx = \int [f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)]\, dx$$

Per la proprietà di linearità dell'integrale si ha:

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\, dx = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Se si osserva che il primo membro rappresenta la primitiva della sua derivata quindi si ha:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Con semplici passaggi si deduce la tesi:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Lo studente osservi che la condizione che le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono derivabili implica che esse siano anche continue in I