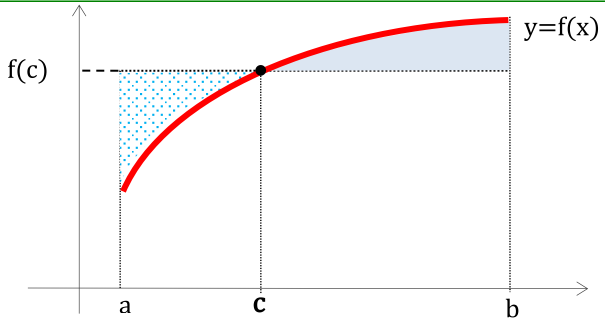
Teorema della media

enunciato

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$

allora esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo chiuso $[a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$



dimostrazione

Osserviamo che le ipotesi sono le stesse del teorema di Weierstrass per cui la funzione è dotata di un punto di minimo e di massimo assoluto nell'intervallo [a, b]:	$\exists \ \ m = minimo \ assoluto \ \in [a, b]$ $\exists \ \ M = minimo \ assoluto \ \in [a, b]$
Per definizione di minimo e massimo assoluto, per ogni punto $x \in [a, b]$ della funzione si ha che:	$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall \, x \in \ [a, b]$
Applichiamo ai tre membri della disuguaglianza l'integrale definito tra gli estremi $[a, b]$	$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \ \leq \int_a^b M \, dx$
Osserviamo che:	$\int_a^b m \, dx \ = m \cdot \int_a^b dx \ = m \cdot (b-a)$ $\int_a^b M \, dx \ = M \cdot \int_a^b dx \ = M \cdot (b-a)$
Sostituendo nella disuguaglianza otteniamo:	$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \ \leq M \cdot (b-a)$
Dividiamo i tre membri per $(b-a)$. Osserviamo che il termine centrale è un valore compreso tra il minimo ed il massimo.	$m \leq \dfrac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b-a)} \leq M$
Per il teorema di Bolzano esisterà almeno un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo chiuso $[a, b]$ tale che:	$\dfrac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b-a)} = f(c)$
Moltiplicando entrambi i membri per $(b-a)$ ottieniamo la tesi	$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$

$f(c)$ viene detto *valore medio* di $f(x)$ in $[a, b]$

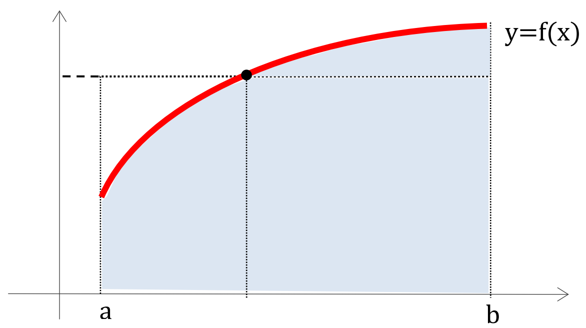
significato geometrico del teorema della media

Riportiamo per comodità l'enunciato del teorema della media:

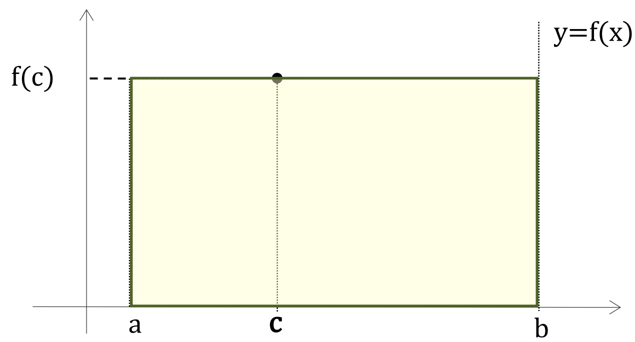
Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$
allora esiste almeno un punto **c** appartenente all'intervallo chiuso $[a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Il primo membro del teorema è l'area del trapezoide di base l'intervallo $[a,b]$ e delimitato superiormente dal grafico della funzione $f(x)$.



Il secondo membro del teorema è l'area del rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$.



Da un punto di vista geometrico il teorema afferma che esiste almeno un punto **c** nell'intervallo $[a,b]$ tale che l'area del trapezoide risulta uguale all'area del rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$.