Successioni: definizioni e teoremi

PASSED

Definizione di successione

Una successione è una funzione tra l'insieme dei numeri Naturali e l'insieme dei numeri Reali tale che ad ogni numero naturale n associa uno ed un solo numero reale a_n

Una successione può essere indicata indifferentemente in uno dei seguenti modi:

$$(a_n)_{n \epsilon N} \text{ o } \{a_n\} \text{ o solo con } \boldsymbol{a_n}$$

Definizione di successione monotona

Una successione $\boldsymbol{a_n}$ si dice **monotona** se soddisfa una delle seguenti condizioni $\forall\, \boldsymbol{n \,\epsilon\, N}$, in particolare:

- se $a_n \leq a_{n+1}$ si dice crescente
- se $a_n < a_{n+1}$ si dice strettamente crescente
- se $a_n \geq a_{n+1}$ si dice decrescente
- se $a_n > a_{n+1}$ si dice strettamente decrescente

Definizione di successione limitata

Una successione $\boldsymbol{a_n}$ si dice **limitata**:

se esiste un numero reale M tale che $|a_n| \leq M \quad \forall\, n \,\epsilon\, N$

Definizione di successione regolare

Una successione $\boldsymbol{a_n}$ si dice **regolare** se ammette limite, in particolare:

- se ammette limite **finito** si dice convergente, se tale limite è uguale a zero si dice infinitesima
- se ammette limite **infinito** si dice divergente o infinita

Definizione di limite finito di successione

Data una successione $\boldsymbol{a_n}$, un numero reale $\boldsymbol{a}$ si dice limite della successione e si scrive:

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$

Definizione di limite infinito di successione

Data una successione $\boldsymbol{a_n}$, si dice che ha limite uguale a $+\infty$ o $-\infty$ se:

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un indice ν tale che $a_n > M$ per ogni $n > \nu$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un indice ν tale che $a_n < -M$ per ogni $n > \nu$

Si osservi che il limite di una successione si può calcolare solo per $\boldsymbol{n} \to +\infty$ in quanto $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per l'insieme dei numeri naturali

Teorema sulle successioni convergenti
Ogni successione convergente è limitata cioè: **Se** una successione ammette limite finito cioè: $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ con $a \in R$ **allora** essa è limitata cioè: $\exists\, M \in R$ tale che $\lvert a_n \rvert \leq M \quad \forall\, n \in N$
Dimostrazione
Applichiamo la definizione di limite per successioni convergenti: $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu$
Tale definizione vale per ogni $\varepsilon > 0$ quindi sarà vera anche per $\varepsilon = 1$, in tal caso si ha: $\lvert a_n - a \rvert < 1 \quad \forall\, n > \nu$
Sottraendo e sommando a e utilizzando la disuguaglianza triangolare si ha: $\lvert a_n \rvert = \lvert a_n - a + a \rvert = \lvert (a_n - a) + a \rvert \leq \lvert a_n - a \rvert + \lvert a \rvert < 1 + \lvert a \rvert \quad \forall\, n > \nu$
Posto $M = massimo \{\lvert a_1 \rvert, \lvert a_2 \rvert, \lvert a_3 \rvert, \dots \dots \lvert a_\nu \rvert, 1 + \lvert a \rvert\}$ segue che: $\lvert a_n \rvert \leq M \quad \forall\, n \in N$ cioè la tesi

Teoremi sulle successioni monotone

Ogni successione monotona è regolare cioè ammette limite, in particolare:

1) Ogni successione monotona limitata è convergente cioè ammette limite finito

Dimostrazione

Consideriamo una successione $\boldsymbol{a_n}$ che sia crescente e limitata, vogliamo dimostrare che sia convergente cioè che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \boldsymbol{a}$ con $a \in \mathrm{R}$

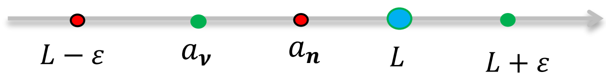
Per ipotesi la successione è limitata quindi sarà dotata di estremo superiore

poniamo $\boldsymbol{L} = sup\, a_n$

Per le proprietà dell'estremo superiore si ha che: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu \in N$ tale che $L - \varepsilon < a_\nu$

Ciò significa che: $a_\nu \le a_n \;\; \forall\, n > \nu$

Quindi si ha: $L - \varepsilon < a_\nu \le a_n \le L < L + \varepsilon \;\; \forall\, n > \nu$



che equivale a: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon \;\; \forall\, n > \nu \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = L}$

2) Ogni successione monotona non limitata è divergente cioè ammette limite infinito

Dimostrazione

Consideriamo una successione $\boldsymbol{a_n}$ che sia crescente e **non** limitata superiormente, vogliamo dimostrare che sia divergente positivamente cioè che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Per ipotesi la successione **non** è limitata ciò vuol dire che:

$$\forall\, \mathrm{M} > 0 \;\; \exists\, \nu \in N \text{ tale che } a_\nu > M$$

Per ipotesi la successione è anche crescente, ciò vuol dire che:

$$a_n \ge a_\nu > M \;\; \forall\, n > \nu \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a_n > M} \text{ cioè la tesi}$$

Nel caso di successioni decrescenti le dimostrazioni sono analoghe