Serie numeriche

Definizioni

Data la successione $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si considerino le **somme parziali** $s_1, s_2, \dots, s_n$ definite come:

$\boldsymbol{s_1} = a_1 \quad \boldsymbol{s_2} = a_1 + a_2 \quad \boldsymbol{s_3} = a_1 + a_2 + a_3 \quad \boldsymbol{s_4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \boldsymbol{s_n} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Si definisce **serie** di termine generale a_n la successione delle somme parziali $\{\boldsymbol{s_n}\}$

Si definisce somma e si pone uguale a $\boldsymbol{S}$ il: $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = S$ tale somma si indica anche con: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum a_n$

Carattere di una serie

Si definisce **carattere** di una serie la sua caratteristica di essere convergente, divergente o indeterminata

se $\boldsymbol{S}$ è finito	• la serie $\sum a_n$ si dice **convergente**
se $\boldsymbol{S} = \pm\infty$	• la serie $\sum a_n$ si dice **divergente** (positivamente o negativamente)
altrimenti	• la serie $\sum a_n$ si dice **indeterminata**

una serie che sia convergente o divergente si dice **regolare**

Prime proprietà

assegnate due serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ ed un numero reale λ

$\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum \lambda\, a_n = \lambda \sum a_n$ converge	convergenza del **prodotto** di una costante per una serie
se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono $\Longrightarrow \sum (a_n + b_n)$ converge	convergenza della **somma** di due serie convergenti

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$	condizione **necessaria** ma non sufficiente per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo

Alcune serie notevoli

nome	simbologia	carattere
serie armonica	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$	divergente
serie armonica generalizzata	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$	$p \le 1$ divergente $p > 1$ convergente
serie geometrica di ragione q	$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$	$q \le 1$ irregolare $-1 < q < 1$ convergente $q \ge 1$ divergente
serie di Mengoli	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$	convergente

© 2021 - www.matematika.it

Serie numeriche

Principali criteri di convergenza

Criterio del confronto per serie a termini non negativi

Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sia: • $0 \le a_n \le b_n$	se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

Criterio del confronto asintotico per serie a termini non negativi

Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sia: • $a_n \ge 0,\ b_n > 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$	se $0 < l < +\infty$ $\Rightarrow$ le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono **entrambe** convergenti oppure divergenti
	se $l = 0$ e $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

Criterio degli infinitesimi per serie a termini non negativi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n \ge 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p a_n = l$ con $p \in \mathbb{R}$	se $0 < l < +\infty$ $\quad p > 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge $p \le 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 0$ e $p > 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l = +\infty$ e $p \le 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

Criterio della radice o di Cauchy per serie a termini positivi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n > 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$	se $l < 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l > 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 1$ $\Rightarrow$ non si può dire nulla

può essere utile in caso di serie con esponenziali

Criterio del rapporto o di D'Alembert per serie a termini positivi

Data la successione $\{a_n\}$ sia: • $a_n > 0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$	se $l < 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
	se $l > 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge
	se $l = 1$ $\Rightarrow$ non si può dire nulla

può essere utile in caso di serie con fattoriali

Criterio di Leibnitz per serie con termini a segno alterno decrescenti

Data la successione $\{a_n\}$ sia: $a_n \ge 0$ Data la serie alternante $\sum(-1)^n a_n$	• se $a_{n+1} \le a_n$ • se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ $\sum(-1)^n a_n$ converge

Criterio di convergenza assoluta

Data la serie $\sum a_n$ e la serie $\sum \lvert a_n \rvert$	se $\sum \lvert a_n \rvert$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

© 2021 - www.matematika.it

Proprietà e teoremi

Definizione di serie a termini non negativi e di serie a termini positivi

Una **serie** $\sum a_n$ si definisce a termini non negativi se $a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in N$

Una **serie** $\sum a_n$ si definisce a termini positivi se $a_n > 0 \quad \forall\, n \in N$

Teorema sulle serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi è regolare cioè o converge oppure diverge positivamente

Dimostrazione

- Consideriamo la successione delle somme parziali $\{\boldsymbol{s_n}\}$ dove $\boldsymbol{s_n} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
- $\boldsymbol{s_n}$ si può anche scrivere come $\boldsymbol{s_n = s_{n-1} + a_n}$
- Se minoriamo il secondo membro si ha: $\boldsymbol{s_n \geq s_{n-1}}$.
- Ciò significa che la successione delle somme parziali è crescente
- Per il teorema sulle successioni monotone $\{\boldsymbol{s_n}\}$ ammette limite e quindi la serie è regolare

Il teorema è verificato anche per serie a termini positivi

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Condizione **necessaria** ma non sufficiente per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo, cioè:

Se $\boldsymbol{\sum a_n}$ converge **allora** $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$

Dimostrazione

- Per ipotesi la serie è convergente, indichiamo con $\boldsymbol{S}$ la sua somma
- Per definizione la somma è uguale al $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} s_n = S}$ dove $\{\boldsymbol{s_n}\}$ è la successione delle somme parziali
- Dove $\boldsymbol{s_n} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ che si può anche scrivere come $\boldsymbol{s_n = s_{n-1} + a_n}$
- Da cui $\boldsymbol{a_n = s_n - s_{n-1}}$
- passando al limite ad entrambi i membri si ha:
- $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} a_n} = \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to +\infty} s_n - \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = S - S = \boldsymbol{0}$ da cui la tesi

© 2021 - www.matematika.it