Problemi di geometria analitica

la retta nel piano cartesiano

1	Le rette AB: $x-y+2=0$, BC: $x=2$, AC: $x+y-2=0$ contengono i lati del triangolo ABC. Scrivi l'equazione della retta che passa per il vertice B e per un punto posto sul lato AC che lo divide nel rapporto $1:3$ a partire dal vertice A.	$y=2x$
2	Nel fascio di rette di centro $C(5;3)$, determina l'equazione della retta r perpendicolare alla retta di equazione $4x-3y-1=0$ e quella della retta s la cui intercetta è -2. Determina l'equazione della retta t parallela all'asse delle ordinate che delimita con le rette r ed s un triangolo di area $\frac{63}{2}$	$3x+4y-27=0$ $x-y-2=0$ $x=-1$ $x=11$
3	Dati i punti $O(0;0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, determinare il luogo dei punti $P(x;y)$ tali che l'area del triangolo POA sia m volte quella del triangolo POB.	$mbx-ay=0$
4	Scrivi l'equazione della retta che intercetta sul semiasse positivo delle ordinate il segmento $OB=\frac{5}{2}$ e sul semiasse positivo delle ascisse il segmento $OA=5$. Scrivi poi l'equazione della retta passante per B e perpendicolare alla retta AB e determina su di essa un punto C di ascissa positiva tale che $CB=AB$. Calcola infine le coordinate del punto D, quarto vertice del quadrato $ABCD$.	$x+2y-5=0$; $4x-2y+5=0$ $C\left(\frac{5}{2};\frac{15}{2}\right)$; $D\left(\frac{15}{2};5\right)$
5	Determina il punto P dell'asse x tale che la somma delle sue distanze dai punti $M(1;2)$ e $N(3;4)$ sia minima.	$P(\frac{5}{3};0)$
6	Nel fascio di rette di equazione $kx-y+6-7k=0$ determina la retta r parallela all'asse x e la retta s che, con r e gli assi cartesiani, delimita un trapezio di area 34.	$y=6$ $9x-4y-39=0$
7	Un raggio di luce è inviato sull'asse delle ascisse dal punto $P(-2;3)$, con un'inclinazione α (con $\tan\alpha=3$). Scrivi l'equazione della retta che contiene il raggio riflesso.	$3x+y+9=0$
8	I punti $A(-1;4)$ e $B(-2;1)$ sono due vertici consecutivi di un rettangolo avente un lato sulla retta di equazione $3x-y-12=0$. Determina le coordinate degli altri due vertici e il perimetro del rettangolo.	$C\left(\frac{47}{10};\frac{21}{10}\right)$, $D\left(\frac{37}{10};-\frac{9}{10}\right)$ $\frac{58}{10}\sqrt{10}$
9	Due rette uscenti dall'origine, perpendicolari fra loro, formano un triangolo isoscele con la retta $2x+y=a$. Determina l'area del triangolo.	$\frac{a^2}{5}$
10	I punti $A(0;2)$ e $C(8;6)$ sono gli estremi di una diagonale di un rombo avente perimetro 20. Determina le coordinate dei vertici B e D e l'area del rombo.	B(5;2); D(3;6) 20
11	Calcola l'area del quadrilatero convesso che ha come vertici il punto $A(3;3)$, il punto C di intersezione delle rette $r_1: x-y+4=0$ e $r_2: 2x+3y-2=0$, e i punti B e D, proiezioni di A sulle due rette.	$\frac{25}{2}$

12	Scrivi l'equazione della parabola γ con vertice $V(3;-1)$, passante per il punto $P(4;0)$. Determina poi l'equazione della parabola simmetrica alla prima rispetto alla retta di equazione $y=2$. Detti A e B i punti di intersezione delle due parabole e V' il vertice della parabola simmetrica γ', calcola perimetro e area del quadrilatero $AVBV'$.	$y=x^2-6x+8$ $y=-x^2+6x-4$ $2p=8\sqrt{3}$ $area=6\sqrt{3}$
13	Date le parabole di equazioni $y=-x^2+5x-4$ e y=x^2-3x-4, determina l'equazione di una retta parallela all'asse x in modo tale che il segmento intercettato sulla retta dalla prima parabola sia $\frac{1}{3}$ di quello intercettato dalla seconda.	$y=\frac{7}{5}$
14	Individua la parabola di equazione $x=ay^2+c$, sapendo che passa per il punto $A(2;3)$ e che in questo punto è tangente ad una retta perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.	$x=\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{2}$ $x=-\frac{1}{6}y^2+\frac{7}{2}$
15	Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, che passa per il punto A$(1;3)$ ed è tangente nell'origine alla retta di coefficiente angolare 4. Una seconda parabola, dello stesso tipo, passa per il punto $B(2;0)$ e ha come vertice $V(3;-1)$, Condurre una retta, parallela all'asse x, in modo tale che risultino uguali le due corde intercettate su di essa dalle due parabole.	$y=-x^2+4x$ $y=x^2-6x+8$ $y=\frac{3}{2}$
16	Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che interseca l'asse delle ascisse nei punti di ascissa -1 e 3 e passa per il punto $P(2;3)$. Inscrivi poi nel segmento parabolico al di sopra dell'asse x un rettangolo, avente un lato sull'asse x, di area $\frac{21}{4}$.	$y=-x^2+2x+3$ $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$
17	Calcola l'area del trapezio rettangolo OABC di vertici $O(0;0), A(0;5), B(2;4), C(-4;-3)$. Scrivi poi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle y, che passa per i punti A, B e C.	area OACB =15 $y=-\frac{15}{2}x^2+\frac{1}{3}x+5$
18	Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallello all'asse y e concavità rivolta verso il basso, avente fuoco in $F(2;4)$ e passante per il punto $P\left(0;\frac{5}{2}\right)$.Nel segmento parabolico posto sopra l'asse x inscrivi poi un trapezio isoscele, avente due vertici nei punti di intersezione della parabola con l'asse x, di area 16.	$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$ $(-1;0);(5;0)$ $(1;4);(3;4)$
19	Dopo aver verificato che le due parabole di equazioni $y=8x^2+8x+4$ e $y=8x^2-8x+8$ ammettono un'unica tangente comune, che le tange nei punti P_1 e P_2, varifica che la distanza tra questi due punti di tangenza è uguale alla distanza fra i vertici delle parabole.	$2y=8x+7$ $P_1\left(-\frac{1}{4};\frac{5}{2}\right)$; $P_2\left(\frac{3}{4};\frac{13}{2}\right)$ $\sqrt{17}$
20	Scrivi l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse x, passante per $P(-1;1)$ e $Q(2;2)$. Determina l'equazione della retta parallela all'asse y che interseca la parabola in A e B in modo tale che il triangolo VAB sia equilatero, essendo V il vertice della parabola.	$x=y^2-2$ $x=1$

21	Determina le equazioni delle due parabole che ammettono il segmento di estremi $A(-1;1), B(3;1)$ come corda passante per il fuoco parallela alla direttrice. Si inscriva poi, nella parte di piano limitata dai due archi AB di queste parabole, un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani il cui perimetro sia 7.	$4y = (x-1)^2$ $4(y-2) = -(x-1)^2$ $\left(0;\frac{1}{4}\right)$

la circonferenza

22	Scrivi l'equazione delle due circonferenze aventi raggio 2, centro sull'asse x e tangenti esternamente alle circonferenze $x^2+y^2-6y=0$ e $x^2+y^2+6y=0$.	$x^2+y^2-8x+12=0$ $x^2+y^2+8x+12=0$
23	Determina il valore del parametro h in modo tale che le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2hx=0$, condotte dal punto $P(5;0)$, siano tali che i segmenti di tangente compresi tra il punto P e i punti di tangenza misurino $\sqrt{5}$.	$h=2$
24	Sia data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-10x-14y+24=0$; conduci le tangenti nei suoi punti $(0;12)$ e $(4;0)$ e calcola l'area del quadrilatero individuato dalle tangenti stesse e dai raggi che terminano nei punti di contatto.	*100*
25	Date la parabola e la retta di equazioni $9y=x^2+6x-54$ e $y=2x-9$, determina le coordinate dei loro punti A e B di intersezione. Verifica poi che il triangolo che ha come vertici l'origine degli assi cartesiani e i punti A e B è rettangolo e determina l'equazione della circonferenza circoscritta a questo triangolo.	*(3;-3) e (9;9)* $x^2+y^2-12x-6y=0$
26	Considerati i punti $A(0;4)$ e $B(12;0)$, determina le equazioni delle due circonferenze di uguale raggio, aventi centro sulla retta AB, passanti una per A e l'altra per B e tangenti esternamente in un punto M. Calcola poi l'area del quadrilatero individuato dagli assi cartesiani, dalla retta AB e dalla retta tangente alle due circonferenze nel punto M.	$x^2+y^2-6x-6y+8=0$ $x^2+y^2-18x-2y+72=0$ $\frac{52}{3}$
27	Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice coincidente con il centro della circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x+4y=0$ ed è tale che l'asse delle ascisse intercetta su di essa una corda di lunghezza 6.	$y=\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x$
28	Dopo aver trovato l'equazione delle due circonferenze uguali aventi centro in $R(-4;2)$ e $Q(6;6)$ e tangenti tra loro, scrivi l'equazione della retta r che giace dalla stessa parte dell'origine O rispetto alla retta RQ e che è tangente a entrambe le circonferenze in due punti A e B. Determina inoltre i punti P dell'asse radicale delle due circonferenze per i quali il triangolo PQR è equivalente al quadrilatero RABQ.	$5y-2x+11=0$ $(5;-6), (-3;14)$

l'ellisse

29	Determina l'equazione della circonferenza di centro $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ e tangente all'ellisse di equazione $3x^2+4y^2-12=0$. Determina inoltre le coordinate del punto di tangenza.	$x^2+y^2-x-2=0$ $P(2;0)$

Problemi di geometria analitica

30	Date le due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + y^2 = 25$, siano A e B i punti in cui una semiretta r uscente dall'origine O incontra le due circonferenze. Sia P il vertice dell'angolo retto del triangolo rettangolo che ha AB come ipotenusa e che ha i lati paralleli agli assi cartesiani. Scrivi l'equazione del luogo dei punti P al variare della semiretta r.	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
31	Determina il punto in cui i raggi vettori sono perpendicolari tra loro sull'ellisse di equazione $x^2 + 5y^2 = 20$.	$(\pm\sqrt{15}; \pm 1)$
32	Dopo aver determinato il centro C del fascio di rette di equazione $(k-1)x + (k-2)y + 3 - 2k = 0$, scrivi l'equazione dell'ellisse di centro C, semiasse minore di lunghezza 2 parallelo all'asse x e semiasse maggiore di lunghezza 3. Determina l'equazione della retta t tangente all'ellisse nel punto P di ordinata positiva in cui essa incontra l'asse delle ordinate; stabilisci inoltre per quale valore di k si ottiene la retta del fascio parallela alla tangente.	$C(1;1)$ $2y - \sqrt{3}x = 2 + 3\sqrt{3}$ $k = 2\sqrt{3} - 2$
33	Siano dati l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, le rette $r: x = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ e $s: x = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$ e il punto $P\left(1; \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$. Determina l'equazione della tangente t all'ellisse in P e i punti $Q = t \cap r$ e $Q' = t \cap s$.	$t: x + 3\sqrt{2}y - 9 = 0$ $Q\left(\frac{9\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{2}(5-\sqrt{5})}{10}\right)$ $Q'\left(-\frac{9\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{2}(5+\sqrt{5})}{10}\right)$
34	Data l'ellisse di equazione $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ e detta S la parte di piano delimitata dall'ellisse e dalla sua simmetrica rispetto all'asse y, determina le equazioni delle rette parallele all'asse x che staccano su S una corda di lunghezza 6.	$y = \pm\frac{3\sqrt{15}}{4}$
35	Scrivi le equazioni della simmetria S_1 rispetto alla retta di equazione $y = x - 3$, della simmetria S_2 rispetto alla retta di equazione $y = -x$ e della trasformazione $T = S_2 \circ S_1$. Dopo aver individuato la natura della trasformazione T, scrivi l'equazione della trasformata dell'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 25$ mediante questa trasformazione.	$x' = y + 3;\ y' = x - 3$ $x' = -y$ $y' = -x$ $x' = -x + 3y' = -y - 3$ *simmetria centrale di centro* $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ $x^2 + 9y^2 - 6x + 54y + 65 = 0$
36	Data l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 25$, determina l'equazione della trasformata nella rotazione di centro $O(0;0)$ e angolo $\frac{\pi}{4}$. Determina la natura del quadrilatero Q che ha i vertici nei punti di intersezione dell'ellisse così ottenuta con gli assi cartesiani. Determina le coordinate dei vertici del quadrilatero Q prima della trasformazione.	$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 50$ *quadrato* $(\sqrt{5}; \sqrt{5}), (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ $(-\sqrt{5}; -\sqrt{5}); (\sqrt{5}; -\sqrt{5})$

l'iperbole

37	Scrivi le equazioni delle rette r e s tangenti all'iperbole di equazione $2xy = 3$ e perpendicolari al suo asse trasverso. Calcola poi l'area del triangolo individuato dagli assi cartesiani e da una delle due tangenti.	$y = -x \pm \sqrt{6}$ 3

Problemi di geometria analitica

38	Determina le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole che hanno entrambe i fuochi nei punti $F(4;0), F^{'}(-4;0)$ e passano per $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$. Determina inoltre l'equazione della circonferenza che passa per i quattro punti comuni alle due curve.	$9x^2+25y^2=225$ $x^2-3y^2=12$ $x^2+y^2-21=0$
39	Scrivi l'equazione della funzione omografica avente per asintoti le rette di equazioni $x=2$ e $y=-1$ e passante per l'origine O del sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Determina inoltre l'equazione della retta tangente alla funzione in O e l'equazione della circonferenza concentrica all'iperbole e ad essa tangente.	$y=\frac{x}{2-x}$ $y=\frac{1}{2}x$ $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
40	Un'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, ed una circonferenza con il centro nell'origine degli assi cartesiani si intersecano nel punto $A(4;3)$. Calcola le aree dei due triangoli ABC e $AB^{'}C'$ dove $BB^{'}$ e $CC^{'}$ sono le rette tangenti nel punto A alle due curve, B e C appartengono all'asse x, mentre $B^{'}$ e $C^{'}$ all'asse delle ordinate.	$\frac{14}{3};\frac{21}{8}$
41	La parabola di equazione $x^2+2y=-8x$ ed un'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, si intersecano in tre punti A, B e C. Sapendo che il punto A ha ascissa -2, determina l'equazione della retta BC e l'area del triangolo ABC.	$-3\pm\sqrt{21}$ $BC: x+y=-6$ $area=10\sqrt{21}$
42	determina il centro C di simmetria della funzione di equazione $y=\frac{x+1}{x+2}$ e scrivi poi l'equazione della circonferenza avente raggio $\frac{\sqrt{17}}{2}$ e centro in C. Calcola le coordinate dei punti di intersezione delle due curve e l'area del quadrilatero da essi individuato.	$\left(0;\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ $\left(-\frac{5}{2};3\right);\left(-4;\frac{3}{2}\right)$ $area=\frac{15}{2}$
43	Data l'iperbole di equazione $xy=m$, con $m>0$, determina il valore del parametro m sapendo che il triangolo limitato dagli assi cartesiani e dalla tangente ad essa in un suo punto qualunque ha area 8. Detti poi P e $P^{'}$ i due punti di ascisse $+1$ e -1 dell'iperbole trovata, determina l'area del rettangolo limitato dalle due tangenti all'iperbole in P e in $P^{'}$ e dalle perpendicolari condotte ad esse per P e $P^{'}$.	$m=4$ $area=\frac{480}{17}$
44	Data l'iperbole equilatera di equazione $y=\frac{2x+1}{hx-k}$, determina i valori dei parametri h e k sapendo che uno dei suoi asintoti è la retta $x=3$ e che inoltre passa per il centro dell'ellisse di equazione $\frac{(x+6)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$.	$y=\frac{36x+18}{-11x+33}$

miscellanea

45	Scrivi le equazioni di due circonferenze che hanno i centri sugli assi cartesiani e sulla retta di equazione $2x+3y-12=0$,sapendo che si incontrano nel punto $A(2;0)$. Trova inoltre l'equazione di una parabola, con asse parallelo all'asse y, che passa per il centro della circonferenza minore ed è tangente in A alla retta che congiunge i punti comuni alle due circonferenze.	$x^2+y^2-12x+20=0$ $x^2+y^2-8y-4=0$ $8y=-3x^2+24x-36$
46	Data la circonferenza $x^2+y^2-4x-4\sqrt{3}y+12=0$, determina le intersezioni A, $A^{'}$ con la retta $y=\sqrt{3}x$, con $x_A<x_{A^{'}}$ e $B, B^{'}$ con la retta $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$, con $x_B<x_{B^{'}}$. Determina inoltre la corda AB .	A$(1;\sqrt{3})$, B$(3;\sqrt{3})$ $AB=2$

Problemi di geometria analitica

47	Scrivi l'equazione dell'ellisse, con i fuochi nei punti $F\left(2; 2+\sqrt{5}\right), F'\left(2; 2-\sqrt{5}\right)$, sapendo che è tangente all'asse y. Determinare poi l'equazione della semiellisse posta nel semipiano delle $y \geq 2$ e determinare il simmetrico della semiellisse rispetto al punto $(0; 2)$.	$9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$ $semiellisse:$ $y=2+\frac{3}{2}\sqrt{4x-x^2}$ $y=2-\frac{3}{2}\sqrt{-4x-x^2}$
48	Della parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2$, determina la simmetrica rispetto alla retta $y=x$. Nella regione limitata dalla prima e dalla seconda parabola, inscrivi un rettangolo di area $2\sqrt{2}$, sapendo che due lati opposti sono paralleli alla bisettrice del primo e terzo quadrante.	$x=\frac{1}{4}y^2$ $4\ oppure\ 2\left(\sqrt{5}-1\right)$
49	Studiare la natura dell'insieme di coniche di equazione $x^2+(k-1)y^2=3-k$ al variare di k. Sia ε la conica degenere data dall'unione di due rette; determinare i punti di incontro A e B di tali rette con l'asse x.	ellisse per 1<k<3, circonferenza per k=2, iperbole per k<1; $x^2+y^2=1$; x=$\pm\sqrt{2}$; A$(-\sqrt{2}; 0)$; B$(\sqrt{2}, 0)$
50	Siano date la semiellisse, posta nel semipiano $y \geq 0$, di vertici $O(0;0), A(4;0); V(2;3)$e la semicirconferenza, posta nel piano $y \leq 0$, di diametro OA e centro C. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.	$y=\frac{3}{2}\sqrt{4x-x^2}$ $y=-\sqrt{4x-x^2}$ area= 5π