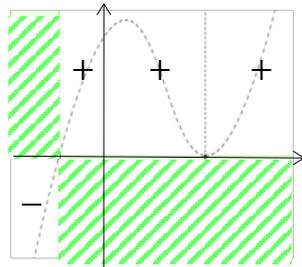
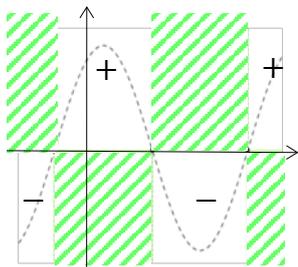


Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

studio del segno della funzione

scopo: lo studio del segno individua le regioni di piano in cui la funzione è positiva (+), cioè si trova nel semipiano delle ordinate positive (al di sopra dell'asse delle x), o negativa (-), cioè si trova nel semipiano delle ordinate negative (al di sotto dell'asse delle x). Lo studio del segno va svolto solo all'interno del dominio della funzione



come si cerca:

- si pone la funzione maggiore di zero
- si risolve la disequazione $f(x) > 0$
- si cancellano le regioni di piano dove la funzione **NON** esiste

esempio

Studiamo il segno della seguente funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2}$$

si studia innanzitutto il dominio

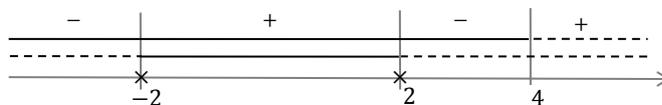
$$4-x^2 \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

si pone la funzione maggiore di zero

$$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2} > 0$$

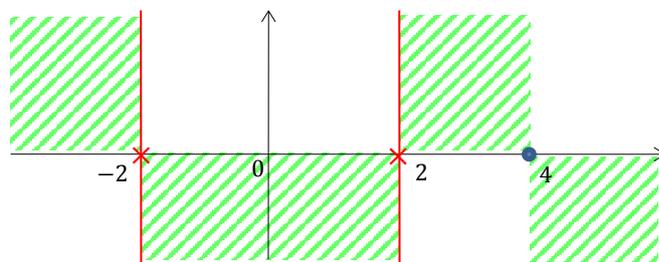
si risolve la disequazione $f(x) > 0$

$$\frac{4-x}{4-x^2} > 0 \rightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$



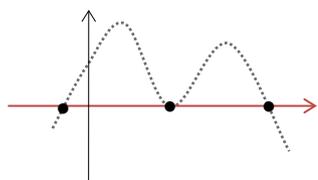
si cancellano le regioni di piano dove la funzione **non** esiste:

- nell'intervallo dove la funzione è negativa si cancella la parte di piano al di sopra dell'asse x
- nell'intervallo dove la funzione è positiva si cancella la parte di piano al di sotto dell'asse x



studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani

scopo: lo studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani individua i punti di contatto della funzione con l'asse x e con l'asse y . I primi sono anche detti "zeri della funzione" perché ordinata uguale a zero

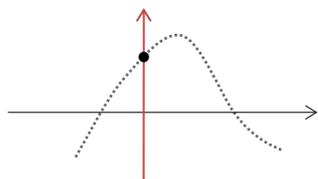


$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 0$$

intersezioni con l'asse x o zeri della funzione

come si cercano:

- si pone la funzione uguale a zero, si risolve l'equazione
- le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione



$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = f(0)$$

intersezione con l'asse y (solo se il dominio lo consente)

come si cerca:

- si sostituisce 0 alla x nella funzione
- si svolgono i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle y



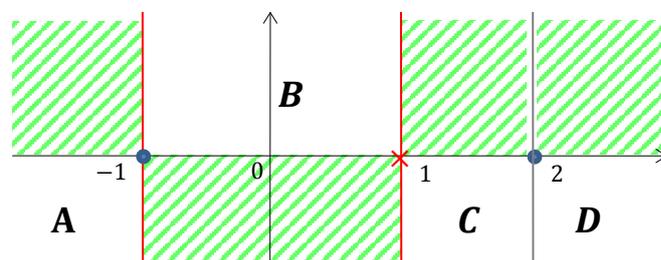
Osserva che l'intersezione con l'asse y se esiste è unica

Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

esempio

Studiamo le intersezioni con gli assi cartesiani della seguente funzione	$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2}$	si studia prima il dominio: $4-x^2 \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
cerchiamo le intersezioni con l'asse x ponendo la funzione uguale a zero	$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2} = 0$	
risolviamo l'equazione; la soluzione è l'ascissa del punto di intersezione cercato	$\frac{4-x}{4-x^2} = 0 \rightarrow 4-x = 0 \rightarrow x = 4$	
cerchiamo le intersezioni della funzione con l'asse y sostituendo 0 alla x nella funzione; si sviluppano i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto cercato	$f(0) = \frac{4-0}{4-0} \rightarrow y = 1$	

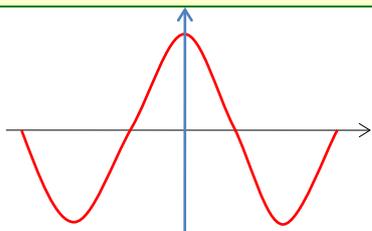
 Gli eventuali punti di intersezione della funzione con l'asse x si possono anche dedurre osservando il grafico dello studio del segno (vedi disegno a destra). Due zone successive di segno opposto (A e B) sono separate da un punto (-1) di intersezione della funzione con l'asse x (a condizione che il punto appartenga al dominio); le zone (B e C) sono separate dal punto (1) che non è un punto di intersezione con l'asse x perché non appartiene al dominio. Due zone successive dello stesso segno (C e D) individuano invece un punto (2) di contatto della funzione con l'asse delle x (sempre che il punto appartenga al dominio)



studio delle simmetrie di una funzione

scopo: la presenza di eventuali simmetrie semplifica la ricerca del grafico della funzione. Ciò consente di studiare analiticamente la funzione solo nel semipiano positivo delle ascisse e successivamente di ribaltarne il grafico ottenuto nel semipiano negativo, rispetto all'asse y se la funzione è pari, oppure rispetto all'origine se la funzione è dispari

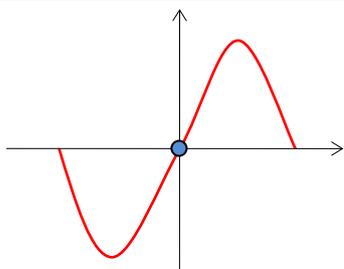
simmetria rispetto all'asse y o simmetria pari



una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y si dice **pari** *come si cerca:*

- si sostituisce (x) con ($-x$) nel testo della funzione
- si sviluppano i calcoli
- se $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari

simmetria rispetto all'origine o simmetria dispari



una funzione simmetrica rispetto **all'origine** degli assi cartesiani si dice **dispari** *come si cerca:*

- dopo avere verificato che la funzione NON è pari
- si moltiplica -1 con $f(-x)$ ottenendo $-f(-x)$
- si sviluppano i calcoli
- se $-f(-x) = f(x)$ la funzione è dispari

esempi

1. Studiamo la simmetria della seguente funzione	$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2}$	si cerca prima il dominio: $4-x^2 \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
verifichiamo se la funzione è pari : sostituiamo ($-x$) con x nel testo della funzione e sviluppiamo i calcoli	$f(-x) = \frac{4-(-x)}{4-(-x)^2} = \frac{4+x}{4-x^2}$	

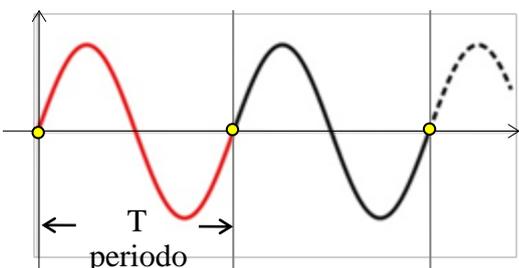
Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

confrontiamo il testo ottenuto della $f(-x)$ con quello iniziale della $f(x)$ e notiamo che sono diversi	$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ la funzione non è pari
verifichiamo se la funzione è dispari : moltiplichiamo "−1" con $f(-x)$ cioè $-f(-x)$	$-f(-x) = -1 \cdot \frac{4+x}{4-x^2} = \frac{-4-x}{4-x^2}$
confrontiamo $-f(-x)$ con $f(x)$ e notiamo che sono diversi	$-f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ la funzione non è nemmeno dispari

2. Studiamo la simmetria della seguente funzione	$f(x) = \frac{x}{4-x^2}$	si cerca prima il dominio: $4-x^2 \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
verifichiamo se la funzione è pari : sostituiamo $(-x)$ con x nel testo della funzione e sviluppiamo i calcoli	$f(-x) = \frac{(-x)}{4-(-x)^2} = \frac{-x}{4-x^2}$	
confrontiamo il testo ottenuto della $f(-x)$ con quello iniziale della $f(x)$ e notiamo che sono diversi	$f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ la funzione non è pari	
verifichiamo se la funzione è dispari : moltiplichiamo "−1" con $f(-x)$ cioè $-f(-x)$	$-f(-x) = -\frac{-x}{4-x^2} = \frac{x}{4-x^2}$	
confrontiamo $-f(-x)$ con $f(x)$ e notiamo che sono uguali	$-f(-x) = f(x) \rightarrow$ la funzione è dispari	

 lo studio delle eventuali simmetrie di una funzione si effettua in genere dopo aver calcolato il dominio e studiato il segno della funzione. Ciò è un vantaggio perché se il grafico del dominio e del del segno sono entrambi simmetrici allora (e solo allora) la funzione potrebbe essere simmetrica e si passa a studiarne algebricamente le simmetrie. Viceversa se il grafico del dominio o il grafico del segno **NON** sono entrambi simmetrici la funzione **NON** potrà essere simmetrica.

studio della periodicità di una funzione



definizione:
una funzione che ripete a intervalli regolari la sua forma si dice periodica e la dimensione dell'intervallo ripetuto si dice periodo e si indica con T

come si cerca il periodo **T** di una funzione:

- si pone $f(x + T) = f(x)$ ottenendo una equazione
- si risolve l'equazione nell'incognita T
- il valore trovato di T è il periodo della funzione

esempi

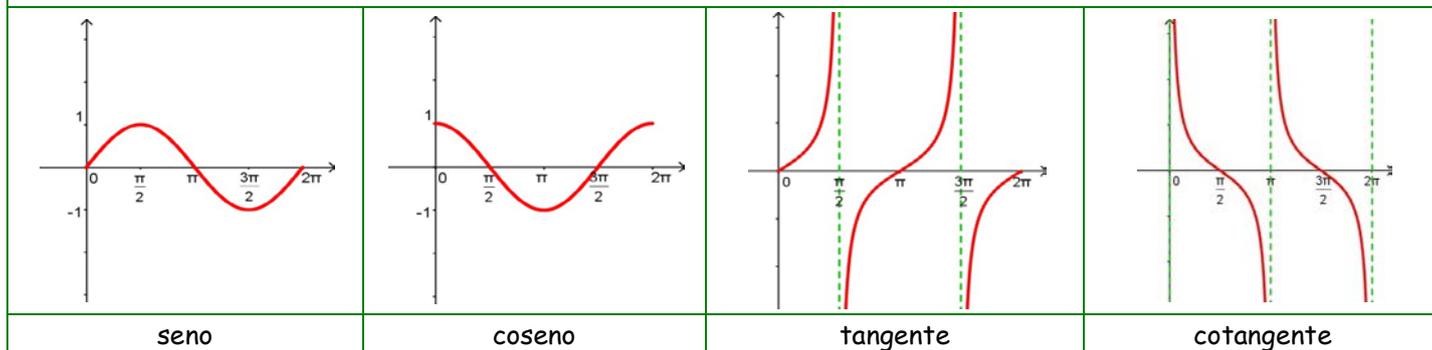
1. Calcoliamo il periodo della seguente funzione	$f(x) = \sin(5x)$
poniamo $f(x + T) = f(x)$ ottenendo una equazione	$\sin(5(x + T)) = \sin(5x) \rightarrow \sin(5x + 5T) = \sin(5x)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$5x + 5T = 5x + 2k\pi \rightarrow 5T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{2}{5}k\pi$
il periodo richiesto si trova ponendo $k = 1$	$T = \frac{2}{5}k\pi \rightarrow \text{per } k = 1 \rightarrow T = \frac{2}{5}\pi$

2. Calcoliamo il periodo della seguente funzione	$f(x) = \tan\left(\frac{x}{5}\right)$
poniamo $f(x + T) = f(x)$ ottenendo una equazione	$\tan\left(\frac{1}{5}(x + T)\right) = \tan\left(\frac{x}{5}\right) \rightarrow \tan\left(\frac{x}{5} + \frac{T}{5}\right) = \tan\left(\frac{x}{5}\right)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$\frac{x}{5} + \frac{T}{5} = \frac{x}{5} + k\pi \rightarrow T = 5k\pi$
il periodo richiesto si trova ponendo $k = 1$	$T = 5k\pi \rightarrow \text{per } k = 1 \rightarrow T = 5\pi$

Segno, intersezioni, simmetrie e periodicità di una funzione

osservazioni importanti

1. il calcolo del periodo di una funzione si effettua solo se la funzione è **composta da funzioni periodiche**
 Ricordiamo che le funzioni periodiche elementari sono: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$. Le prime due hanno periodo uguale a 2π , le ultime due hanno periodo uguale a π , come si vede dai loro grafici qui sotto riportati. In questi casi si possono utilizzare le più semplici formule riportate di seguito per il calcolo della periodicità.



2. la ricerca del periodo di una funzione si effettuata risolvendo un'equazione goniometrica. In molti casi lo svolgimento dell'equazione può risultare complesso per cui è utile ricordare alcune regole pratiche:

a) data una funzione $f(x)$ di periodo T : il periodo di $f(n \cdot x)$ è $\frac{T}{n}$ il periodo di $f\left(\frac{x}{n}\right)$ è $n \cdot T$

$\text{sen}(7x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{7}$	$\cos\left(\frac{x}{5}\right) \rightarrow T = 10\pi$	$\text{tg}(3x) \rightarrow T = \frac{\pi}{3}$	$\text{cotg}\left(\frac{x}{4}\right) \rightarrow T = 4\pi$
---	--	---	--

b) data una funzione composta dalla somma (o differenza) di funzioni periodiche il suo periodo è uguale al minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni che la compongono

$$f(x) = \sin(7x) + \tan(3x) \rightarrow T = m.c.m.\left\{\frac{2}{7}\pi; \frac{1}{3}\pi\right\} \rightarrow T = m.c.m.\left\{\frac{6}{21}\pi; \frac{7}{21}\pi\right\} \rightarrow T = \frac{42}{21}\pi \rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \cot\left(\frac{x}{4}\right) - \sin(3x) \rightarrow T = m.c.m.\left\{4\pi; \frac{2}{3}\pi\right\} \rightarrow T = m.c.m.\left\{\frac{12}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi\right\} \rightarrow T = \frac{12}{3}\pi \rightarrow T = 4\pi$$

quesiti tratti da tracce di esami di stato di liceo scientifico

1. "Sia $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$. Qual è il suo periodo?" (Tratto dall'esame di Stato 2012 problema 1 prima domanda)

poniamo $g(x + T) = g(x)$ ottenendo una equazione	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi(x + T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$\frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi T = \frac{3}{2}\pi x + 2k\pi \rightarrow \frac{3}{2}\pi T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{4}{3}k$
il periodo richiesto si trova ponendo $k = 1$	$T = \frac{4}{3}$
applicando la regola pratica si ha	$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi/2} \rightarrow T = \frac{4}{3}$

2. "Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos(5x)$ " (Tratto dall'esame di Stato 2009 quesito 10)

poniamo $f(x + T) = f(x)$ ottenendo una equazione	$\cos(5(x + T)) = \cos(5x)$
risolviamo l'equazione nell'incognita T	$5x + 5T = 5x + 2k\pi \rightarrow 5T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{2}{5}k\pi$
il periodo richiesto si trova ponendo $k = 1$	$T = \frac{2}{5}\pi$
applicando la regola pratica si ha	$\cos(5x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$