

Algebra dei limiti

algebra dei limiti

Le regole dell'algebra dei limiti di seguito presentate si applicano *esclusivamente* al calcolo dei limiti e non nell'ambito dell'algebra classica.

Ricordando che nell'algebra classica si ha:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a^0 = 1 \quad a \neq 0$$

$$\frac{0}{a} = 0 \quad a \neq 0$$

nell'algebra dei limiti valgono le seguenti regole:

rapporti tra numeri ed infiniti

$$\frac{a}{0} = \pm \infty \quad a \neq 0$$

$$\frac{a}{\pm \infty} = 0$$

$$\frac{\pm \infty}{0} = \pm \infty$$

$$\frac{0}{\pm \infty} = 0$$

somme, prodotti e rapporti tra numeri ed infiniti

$$+\infty \pm a = +\infty$$

$$-\infty \pm a = -\infty$$

$$\pm \infty \cdot a = \pm \infty$$

$$\frac{\pm \infty}{a} = \pm \infty$$

somme e prodotti tra infiniti

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$(\pm \infty) \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$$

potenze con infiniti

$$+\infty^a = +\infty \quad a > 0$$

$$+\infty^a = 0 \quad a < 0$$

$$(-\infty)^n = +\infty \quad n \text{ pari}$$

$$(-\infty)^n = -\infty \quad n \text{ dispari}$$

$$+\infty^{+\infty} = +\infty$$

$$+\infty^{-\infty} = 0$$

$$0^{+\infty} = 0$$

$$0^{-\infty} = +\infty$$



con il simbolo ∞ si intende $\pm \infty$, se si vuole indicare **più** infinito bisogna scrivere $+\infty$ così per **meno** infinito $-\infty$



il segno \pm davanti a ∞ **nei precedenti risultati** va stabilito in base alla regola dei segni (vedi schede successive)

forme indeterminate

Nel calcolo dei limiti si possono presentare i seguenti sette casi dette forme indeterminate.

Per poterle risolvere sono necessari altri procedimenti che saranno illustrati in schede successive.

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

$$0 \cdot (\pm \infty)$$

$$+\infty - \infty$$

$$0^0$$

$$1^{\pm \infty}$$

$$+\infty^0$$

esempi di calcolo di limiti che si presentano in forme Determinate

Per calcolare i limiti degli esempi proposti di seguito si procede nel seguente modo:

1. si sostituisce al posto della x nel testo della funzione il valore a cui tende la x nel limite
2. si sviluppano i calcoli tenendo conto dell'algebra classica, dell'algebra dei limiti e dei grafici delle funzioni elementari

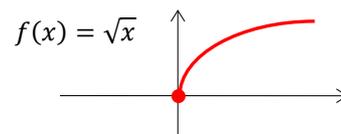
$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 + x^2 - 3x - 1 = 2 \cdot (2^3) + (2)^2 - 3 \cdot (2) - 1 = 2 \cdot 8 + 4 - 6 - 1 = 16 + 4 - 6 - 1 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 + 1 = 2 \cdot (+\infty)^3 + (+\infty)^2 + 1 = 2 \cdot (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty + \infty + 1 = +\infty$$

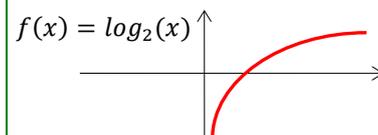
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(0)^2 - 4}{(0) + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3+x}{x+2} \right)^{x-3} = \left(\frac{3+3}{3+2} \right)^{3-3} = \left(\frac{6}{5} \right)^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{(-\infty)^2 - 2} = \sqrt{+\infty - 2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2(2x^2 + 1) &= \log_2(2(-\infty)^2 + 1) = \\ &= \log_2(2 \cdot (+\infty) + 1) = \log_2(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

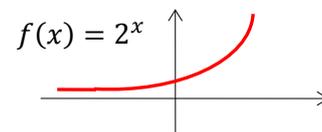


$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{4 - 2^x} = \frac{7}{4 - 2^2} = \frac{7}{4 - 4} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

in seguito si vedrà come stabilire il segno dell'infinito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\cos x + 2} = \frac{e^{\sin(0)} - 1}{\cos(0) + 2} = \frac{e^0 - 1}{1 + 2} = \frac{1 - 1}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_5[\sin^2(2^x + \pi)] &= \log_5[\sin^2(2^{-\infty} + \pi)] = \log_5[\sin^2((0) + \pi)] \\ &= \log_5[\sin^2(\pi)] = \log_5(0^2) = \log_5(0^+) = -\infty \end{aligned}$$



I due esercizi che seguono sono esempi di calcolo di limite che si presentano in **forma indeterminata**.

Nelle schede successive verranno trattati questi casi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3(+\infty)^2}{4(+\infty)^2} = \frac{3(+\infty)}{4(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x = 3(+\infty)^2 - 2(+\infty) = 3(+\infty) - \infty = +\infty - \infty$$