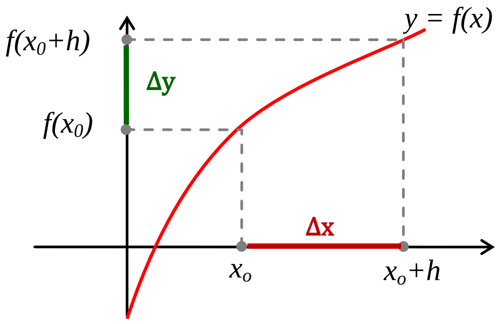
Definizione di rapporto incrementale e di Derivata di una funzione

definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto x_0



- data una funzione $y = f(x)$ ed un punto $\boldsymbol{x_0}$ appartenente al dominio D della funzione
- si chiama **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- $\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$ si chiama **incremento della variabile x**
- $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ si chiama **incremento della funzione**

⚠ il rapporto incrementale ha senso per ogni h tale che $x_0 + h$ appartiene ancora al dominio D della funzione

definizione di derivata prima di una funzione in un punto x_0

- data una funzione $y = f(x)$ ed un punto x_0 appartenente al dominio D della funzione
- si definisce **derivata prima di $f(x)$ nel punto x_0** il limite, **se esiste** [1] ed è **finito**, del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

[1]) si ricorda che affinché il limite esista devono esistere essere uguali i limiti da sinistra e da destra della funzione

se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo o del dominio si dice che $f(x)$ è derivabile nell'intervallo o nel dominio. Per indicare la derivata prima si usano equivalentemente i seguenti simboli: $f'(x)$, $y'(x)$, $Df(x)$

definizione di derivata prima sinistra e destra di una funzione in un punto x_0

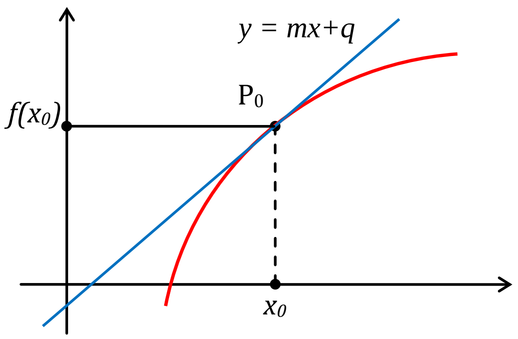
si definisce **derivata prima sinistra di $f(x)$ nel punto x_0** il limite sinistro, **se esiste ed è finito,** del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0 :

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

si definisce **derivata prima destra di $f(x)$ nel punto x_0** il limite destro, **se esiste ed è finito**, del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

significato geometrico di derivata



la derivata prima di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0 cioè nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = m$$

per trovare l'equazione della retta $y = mx + q$ tangente al grafico di una funzione $f(x)$ nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$:

- si calcola la derivata prima della funzione nel punto x_0 , il suo valore rappresenta il coefficiente angolare della tangente
- nell'equazione del fascio di rette $y - y_0 = m(x - x_0)$ si sostituiscono ad x_0 ed y_0 le coordinate del punto $P_0(x_0, f(x_0))$ e ad m il valore della derivata prima della funzione cioè $f'(x_0)$
- si ottiene così l'equazione della retta tangente: $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$