Definizione di integrale indefinito di una funzione

definizione di primitiva

una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** di un'altra funzione $f(x)$ se:

$$\boldsymbol{D[F(x)] = f(x)}$$

cioè se $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e se la sua derivata è uguale a $f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

esempi

- la funzione $\boldsymbol{x^2}$ è una primitiva di $2x$ perché $D[x^2] = 2x$
- la funzione $\boldsymbol{ln(x)}$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ perché $D[ln(x)] = \frac{1}{x}$
- la funzione $\boldsymbol{sen(x)}$ è una primitiva di $cos(x)$ perché $D[sen(x)] = cos(x)$

osservazione

- riprendendo l'esempio precedente si osserva che $sen(x)$ non è l'unica primitiva di $cos(x)$. Infatti:

  $D[sen(x) + 1] = cos(x)$ $\qquad$ $D[sen(x) + 2] = cos(x)$ $\qquad$ $D[sen(x) + costante] = cos(x)$

  Cioè, le primitive di $cos(x)$ differiscono tutte per una costante e sono dunque infinite. Si possono scrivere in maniera sintetica nelle forma "$\boldsymbol{sen(x) + c}$" dove c è un qualsiasi numero reale. In generale vale che:

  "ogni funzione $f(x)$ è dotata di infinite primitive $F(x)$ che si possono scrivere nella forma "$\boldsymbol{F(x) + c}$"".

- si può infatti dimostrare che due qualsiasi primitive $F(x)$ e $G(x)$ di una stessa funzione differiscono per una costante, cioè $F(x) - G(x) = c$

  Ad esempio consideriamo due primitive di $cos(x)$, $F(x) = sen(x) + 8$ e $G(x) = sen(x) + 2$. Per il teorema si ha: $F(x) - G(x) = sen(x) + 8 - [sen(x) + 2] = sen(x) + 8 - sen(x) - 2 = 6$

definizione di integrale indefinito

si chiama integrale indefinito di una funzione $f(x)$ l'insieme di tutte le sue primitive " $F(x) + c$ "

L'integrale indefinito si indica con il simbolo

$$\boldsymbol{\int f(x)\, dx}$$

e si legge "integrale di f(x) in de x"

La $f(x)$ si chiama "funzione integranda" e dx si chiama "differenziale di x". In sintesi:

$$\boldsymbol{\int f(x)\, dx = F(x) + c}$$

esempi

ricordando la tabella delle derivate delle funzioni elementari si ha:

• $\int 1\, dx = x + c$ perché $D[x + c] = 1$	• $\int e^x\, dx = e^x + c$ perché $D[e^x + c] = e^x$
• $\int 2x\, dx = x^2 + c$ perché $D[x^2 + c] = 2x$	• $\int \frac{1}{cos^2 x}\, dx = tg(x) + c$ perché $D[tg(x) + c] = \frac{1}{cos^2 x}$

osservazione

L'integrale indefinito di una funzione è l'**operazione** che ha lo scopo di trovare tutte le primitive della funzione.

Per risolvere l'integrale indefinito basta calcolare la generica primitiva ed aggiungere ad essa la costante "c" come visto negli esempi precedenti.

