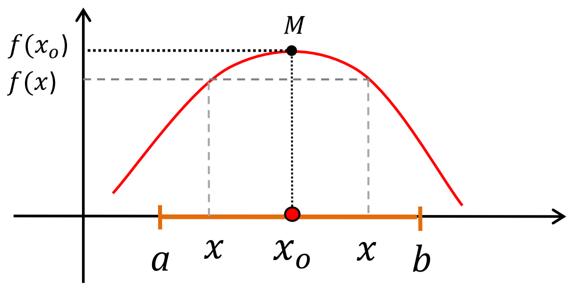
Teorema sui massimi e minimi di una funzione (teorema di Fermat)

enunciato

Sia:

- $f(x)$ una funzione
- $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato contenuto nel dominio D della funzione
- $\boldsymbol{x_0}$ un punto di **massimo** o **minimo** relativo della funzione interno ad $[a, b]$

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 **allora** $f'(x_0) = 0$



dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo. Allora, per definizione di massimo relativo si ha:	$\exists\, I_{x_0} : f(x_0) \geq f(x) \;\; \forall\, x \in \left(I_{x_0} \cap D \right)$
Consideriamo il rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0	$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Determiniamo il segno del rapporto incrementale nei due casi in cui x sia maggiore di x_0 o minore di x_0	se $x > x_0$ allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{-}{+} \leq 0$ se $x < x_0$ allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{-}{-} \geq 0$
Calcoliamo il limite per $x \to x_0$ di entrambi i rapporti incrementali. Si ottiene la derivata destra e la derivata sinistra di $f(x)$ in x_0	$\lim\limits_{x \to {x_0}^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$ $\lim\limits_{x \to {x_0}^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$
Essendo per ipotesi la funzione derivabile in x_0, la derivata destra è uguale alla derivata sinistra. Questo è possibile solo se sono entrambe uguali a zero, cioè la tesi:	$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$

osservazione

Il teorema di Fermat non si inverte. Infatti se la derivata prima in un punto x_0 è uguale a zero, il punto x_0 può essere un punto di massimo relativo, di minimo relativo oppure un punto di flesso a tangente orizzontale.

I punti che annullano la derivata prima di una funzione vengono detti **punti stazionari.**