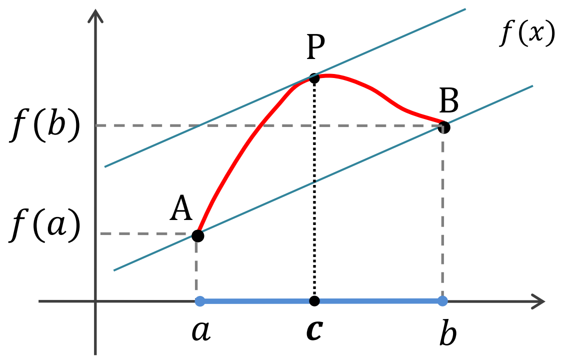
Teorema di Lagrange

enunciato

Se una funzione $f(x)$ è:
- continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- derivabile nei punti interni dell'intervallo (a, b)

allora esiste almeno un punto **c** interno all'intervallo (a, b) tale che:

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



dimostrazione

Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x)$ tale che: $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$

Si osservi che:
- $f(x)$ è continua in [a, b] e derivabile nei punti interni per ipotesi
- $f(a)$ e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sono costanti e quindi sono continue e derivabili in tutto $\mathcal{R}$
- $(x - a)$ è un binomio di primo grado e quindi è una funzione continua e derivabile in tutto $\mathcal{R}$

Verifichiamo che $\varphi(x)$ soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle:
1. $\varphi(x)$ è continua in [a, b] perché è una combinazione lineare di funzioni continue in [a, b]
2. $\varphi(x)$ è derivabile nei punti interni di (a, b) perché è una combinazione lineare di funzioni derivabili in (a, b)
3. calcoliamo $\varphi(x)$ nel punto a e nel punto b cioè $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = \mathbf{0}$$

quindi $\varphi(a) = \varphi(b)$

Applichiamo il teorema di Rolle alla $\varphi(x)$. Si ha che:	esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ interno all'intervallo (a, b) tale che $\boldsymbol{\varphi'(c) = 0}$
Calcoliamo la derivata prima di $\varphi(x)$:	$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ perché $D[f(a)] = 0$ e $D[(x - a)] = 1$
Calcoliamo la derivata di $\varphi(x)$ nel punto **c** e poniamola uguale a zero:	$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ cioè $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$
Portiamo a secondo membro la frazione, si ottiene così la tesi:	$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

in sintesi: si introduce la funzione ausiliaria $\varphi(x)$ e si verifica che essa soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle. Si applica il teorema di Rolle alla $\varphi(x)$ e si giunge alla tesi del teorema di Lagrange.

Teorema di Lagrange

significato geometrico

Riportiamo per comodità l'enunciato del teorema di Lagrange:

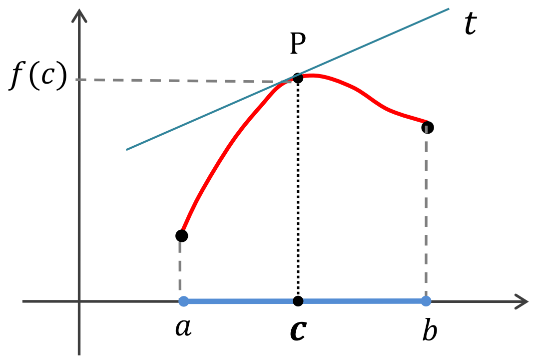
Se una funzione $f(x)$ è:
- continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- derivabile nei punti interni dell'intervallo (a, b)

allora esiste almeno un punto **c** interno all'intervallo (a, b) tale che:

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

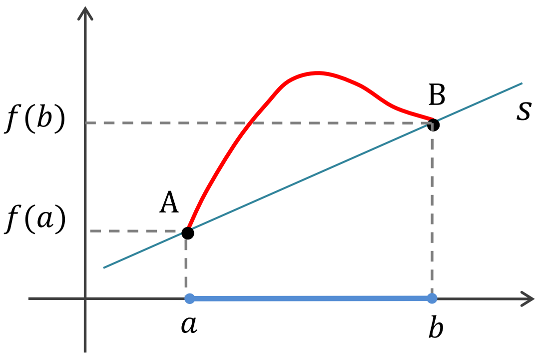
Il primo membro $\boldsymbol{f'(c)}$, per il significato geometrico di derivata in un punto, rappresenta il coefficiente angolare $\boldsymbol{m_t}$ della retta t tangente alla funzione nel punto P di ascissa c ed ordinata $f(c)$, cioè:

$$\boldsymbol{f'(c) = m_t}$$



Il secondo membro $\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ rappresenta il coefficiente angolare $\boldsymbol{m_s}$ della retta s passante per i punti A e B, cioè:

$$\boldsymbol{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_s}$$



La tesi del teorema è una uguaglianza di due coefficienti angolari: $\boldsymbol{m_t = m_s}$

Ciò significa che le rette t ed s sono parallele.

Da un punto di vista geometrico il teorema di Lagrange afferma che nell'intervallo aperto (a, b) esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ tale che la retta t tangente alla funzione nel punto P è parallela alla retta s passante per i punti A e B.