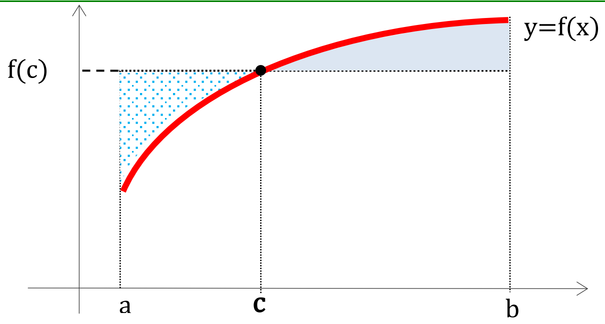
Teorema della media

enunciato

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

allora esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo chiuso $[a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$



dimostrazione

Osserviamo che le ipotesi sono le stesse del teorema di Weierstrass per cui la funzione è dotata di un punto di minimo e di massimo assoluto nell'intervallo [a, b]:	$\exists\ m = minimo\ assoluto$ $\exists\ M = massimo\ assoluto$
Per definizione di minimo e massimo assoluto, per ogni punto $x \in [a,b]$ della funzione si ha che:	$m \le f(x) \le M \qquad \forall\ x \in\ [a,b]$
Applichiamo ai tre membri della disuguaglianza l'integrale definito tra gli estremi $[a,b]$	$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$
Osserviamo che:	$\int_a^b m\,dx = m\cdot\int_a^b dx = m\cdot(b-a)$ $\int_a^b M\,dx = M\cdot\int_a^b dx = M\cdot(b-a)$
Sostituendo nella disuguaglianza otteniamo:	$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a)$
Dividiamo i tre membri per $(b-a)$. Osserviamo che il termine centrale è un valore compreso tra il minimo ed il massimo.	$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$
Per il teorema di Bolzano esisterà almeno un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo chiuso $[a,b]$ tale che:	$\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} = f(c)$
Moltiplicando entrambi i membri per $(b-a)$ ottieniamo la tesi	$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$

$f(c)$ viene detto *valore medio* di $f(x)$ in $[a,b]$

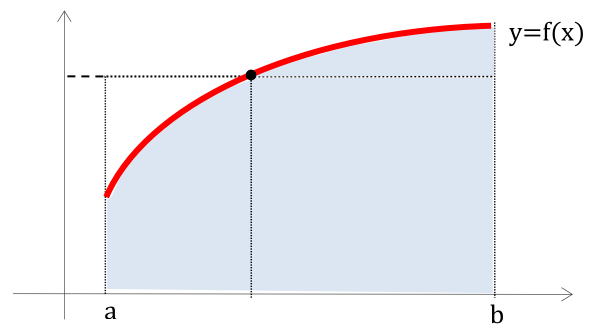
significato geometrico del teorema della media

Riportiamo per comodità l'enunciato del teorema della media:

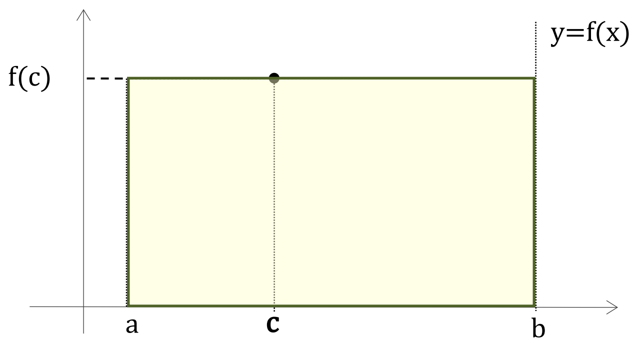
Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$
allora esiste almeno un punto **c** appartenente all'intervallo chiuso $[a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Il primo membro del teorema è l'area del trapezoide di base l'intervallo $[a,b]$ e delimitato superiormente dal grafico della funzione $f(x)$.



Il secondo membro del teorema è l'area del rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$.



Da un punto di vista geometrico il teorema afferma che esiste almeno un punto **c** nell'intervallo $[a,b]$ tale che l'area del trapezoide risulta uguale all'area del rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$.