Definizione di Primitiva

Una funzione $F(x)$ derivabile in $[a,b]$ si dice primitiva di $f(x)$ se $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ $\forall x \in [a,b]$

Per esempio una primitiva della funzione $f(x) = 1$ è $F(x) = x$ perché $DF(x) = D(x) = 1$
oppure una primitiva della funzione $f(x) = 3x^2$ è $F(x) = x^3$ perché $DF(x) = D(x^3) = 3x^2$

Caratterizzazione delle primitive

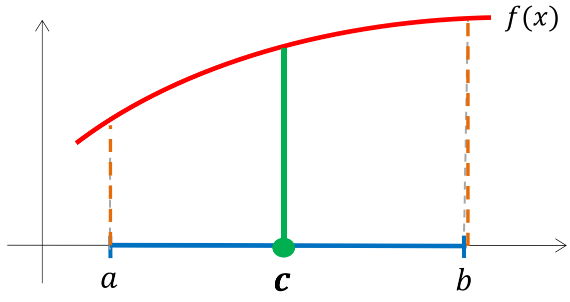
Due primitive di una stessa funzione differiscono per una costante cioè:

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di una stessa funzione in un intervallo $[a,b]$

allora $F(x) - G(x) = \boldsymbol{c}$ $\quad \forall x \in [a,b]$

dimostrazione

Posto $H(x) = F(x) - G(x)$ deriviamo ambo i membri	$H'(x) = [F(x) - G(x)]'$
Per la proprietà additiva delle derivate si ha:	$H'(x) = F'(x) - G'(x)$
Per ipotesi $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$ quindi $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ quindi	$H'(x) = f(x) - f(x)$
Ciò significa che:	$H'(x) = 0$
Ricordando il teorema che caratterizza le funzioni costanti in un intervallo [a, b]	Una funzione è costante in un intervallo [a, b] **se e solo se** è derivabile in [a, b] è la sua derivata è uguale a zero $\forall x \in [a,b]$
Possiamo dedurre che:	$H(x) = costante$
Posto $H(x) = \boldsymbol{c}$ si ottiene la tesi:	$F(x) - G(x) = \boldsymbol{c}$

Formula fondamentale del calcolo integrale	
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ **allora** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$	

dimostrazione	
Consideriamo un punto c appartenente all'intervallo $[a, b]$. Per la proprietà additiva degli integrali definiti, si ha (vedi figura):	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Invertiamo gli estremi di integrazione e ricordiamo che il segno dell'integrale cambia:	$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Per la definizione di funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ si ha che:	$F(a) = \int_c^a f(t)dt$ e $F(b) = \int_c^b f(t)dt$
Sostituendo:	$\int_a^b f(x)dx = -F(a) + F(b)$
Ordinando i termini a secondo membro si ottiene la tesi. In altre parole: l'integrale definito tra a e b di $f(x)$ è uguale alla differenza dei valori assunti da una primitiva $F(x)$ agli estremi dell'intervallo $[a, b]$	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$