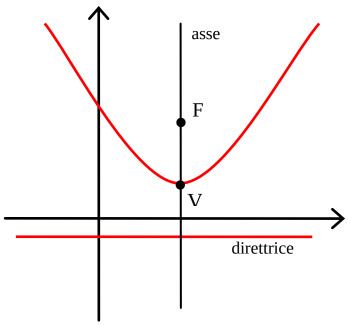
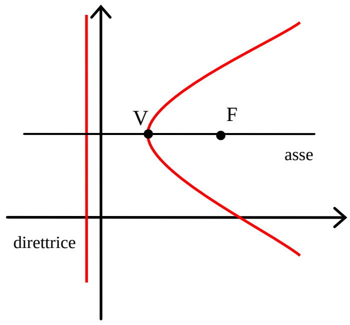
Parabola

definizione

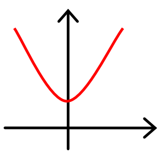
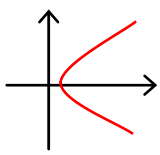
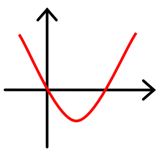
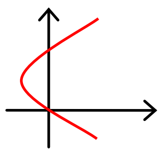
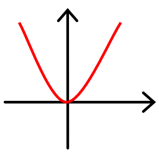
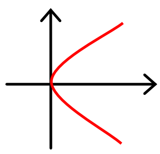
La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice, cioè: $\overline{PF} = \overline{Pd}$





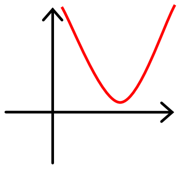
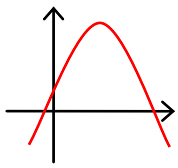
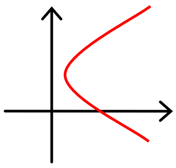
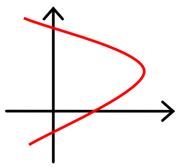
parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y	parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
equazione completa	
$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
coordinate del vertice	
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$
coordinate del fuoco	
$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
equazione dell'asse	
$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{b}{2a}$
equazione della direttrice	
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$

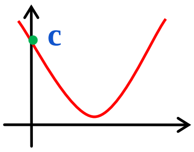
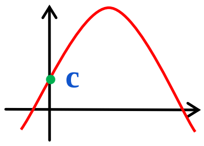
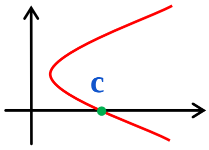
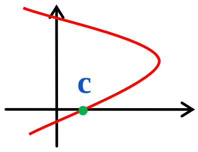
parabole particolari

Se $b = 0$ la parabola ha il vertice sull'asse y $y = ax^2 + c$		Se $b = 0$ la parabola ha il vertice sull'asse x $x = ay^2 + c$	
Se $c = 0$ la parabola passa per l'origine $y = ax^2 + bx$		Se $c = 0$ la parabola passa per l'origine $x = ay^2 + by$	
Se $b = 0$ e $c = 0$ la parabola ha il vertice nell'origine $y = ax^2$		Se $b = 0$ e $c = 0$ la parabola ha il vertice nell'origine $x = ay^2$	

osserva che se $a = 0$ la parabola degenera in una retta

Parabola

significato grafico del coefficiente $\boldsymbol{a}$			
			
$\boldsymbol{a} > 0$	$\boldsymbol{a} < 0$	$\boldsymbol{a} > 0$	$\boldsymbol{a} < 0$

significato grafico del coefficiente $\boldsymbol{c}$			
			
il coefficiente $\boldsymbol{c}$ rappresenta il passaggio della curva sull'asse y (sull'asse x)			

ricerca dell'equazione di una parabola

equazione della parabola noto il fuoco $F(x_F; y_F)$ e la direttrice $y = y_d$	
$\overline{PF} = \overline{Pd}$	• si scrive la definizione di parabola
$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \lvert y - y_d \rvert$	• si calcolano le due distanze
$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = (y - y_d)^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri
$y = ax^2 + bx + c$	• si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione della parabola

equazione della parabola passante per tre punti $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$	
$y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c$ *passaggio per A* $y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c$ *passaggio per B* $y_3 = a{x_3}^2 + bx_3 + c$ *passaggio per C*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione generica della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$\begin{cases} y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c \\ y_3 = a{x_3}^2 + bx_3 + c \end{cases}$	• si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c • si risolve il sistema e si ottengono i valori a, b, c
$y = ax^2 + bx + c$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione della parabola ottenendo l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una parabola è necessario:

- avere tre condizioni (scelte tra: fuoco, vertice, asse, direttrice, passaggio per un punto, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle tre equazioni nelle incognite a, b, c
- risolvere il sistema e trovare i valori di a, b, c
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione della parabola, ottenendo l'equazione cercata

Parabola

ricorda che nel caso in cui è noto il vertice, è vantaggioso sfruttare le seguenti due condizioni:

- passaggio della parabola per il punto Vertice
- porre $-\frac{b}{2a}$ *uguale alla coordinata del vertice nota*

Non conviene utilizzare la coordinata $-\frac{\Delta}{4a}$ del vertice perché questa condizione genera una equazione di II grado

ricerca delle equazioni delle rette tangenti alla parabola

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno alla parabola	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$y_0 + m(x - x_0) = ax^2 + bx + c$	• si sostituisce la y trovata nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + (b - m)x + mx_0 - y_0 + c = 0$	• si ordina l'equazione rispetto alla x
$(b - m)^2 - 4a(mx_0 - y_0 + c) = 0$	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e parabola)
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ della parabola: formula di sdoppiamento	
$y = ax^2 + bx + c$	• si scrive l'equazione della parabola • si pone $x^2 = x_0 \cdot x$ $\quad (y^2 = y_0 \cdot y)$ • si pone $x = \frac{x_0 + x}{2}$ e $y = \frac{y_0 + y}{2}$
$\frac{y_0 + y}{2} = ax_0 \cdot x + b\frac{x_0 + x}{2} + c$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione della parabola • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

equazione della retta tangente con coefficiente angolare m assegnato	
$y = mx + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con a m assegnato
$mx + q = ax^2 + bx + c$	• si sostituisce la y nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0$	• si ordina l'equazione rispetto alla x
$(b - m)^2 - 4a(c - q) = 0$	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e parabola)
$y = mx + q$	• si risolve l'equazione ottenuta nell'incognita q • si sostituisce il valore di q nell'equazione del fascio ottenendo l'equazione della retta tangente

in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente