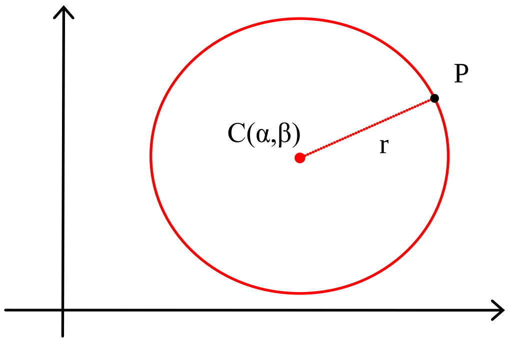
Circonferenza

definizione

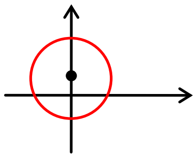
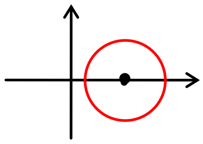
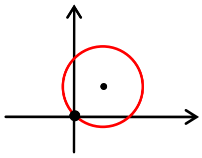
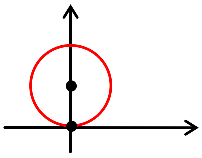
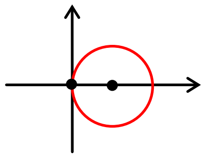
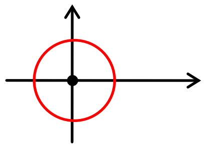
La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro, cioè: $\overline{PC} = r$



$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	equazione circonferenza
$C(\alpha;\beta)$ $\quad \alpha = -\frac{a}{2}$ $\quad \beta = -\frac{b}{2}$	coordinate del centro
$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$	relazione per il raggio
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$	equazione della circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio r

affinché la circonferenza sia reale è necessario che : $\alpha^2 + \beta^2 - c \geq 0$

circonferenze particolari

		
se $a = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse y	se $b = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse x	se $c = 0$ la circonferenza passa per l'origine
		
se $a = 0$ e $c = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse y e passa per l'origine	se $b = 0$ e $c = 0$ la circonferenza ha centro sull'asse x e passa per l'origine	se $a = 0$ e $b = 0$ la circonferenza ha centro nell'origine

osserva che se $a = b = c = 0$ la circonferenza degenera nel punto O(0,0) origine degli assi cartesiani

ricerca dell'equazione di una circonferenza

per scrivere l'equazione di una circonferenza è necessario avere **tre** condizioni, scelte tra:

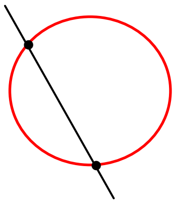
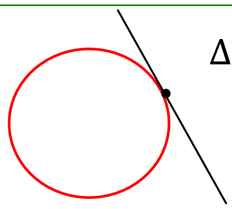
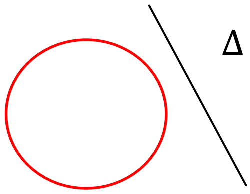
centro	raggio	passaggio per un punto	retta tangente

metodo algebrico	metodo geometrico
• trasformare ogni condizione in una equazione • ottenere il sistema delle tre equazioni nelle incognite a, b, c • risolvere il sistema e trovare i valori di a, b, c • sostituire i valori ottenuti nell'equazione della circonferenza, ottenendo l'equazione cercata	• è utile rappresentare sul piano cartesiano le condizioni note • ricavare da queste, centro e raggio della circonferenza

Circonferenza

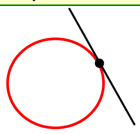
Esempio: equazione della circonferenza passante per tre punti $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$ (metodo algebrico)	
$x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0$ *passaggio per A* $x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0$ *passaggio per B* $x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0$ *passaggio per C*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$
$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$	• si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c • si risolve il sistema e si ottengono i valori a, b, c
$x^2+y^2+ax+by+c=0$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione della circonferenza ottenendo l'equazione richiesta

posizione di una retta rispetto alla circonferenza

 $\Delta>0$	 $\Delta=0$	 $\Delta<0$
retta secante	retta tangente	retta esterna
$x_1\neq x_2$ soluzioni reali e distinte	$x_1=x_2$ soluzioni reali e coincidenti	$\emptyset$ soluzioni non reali

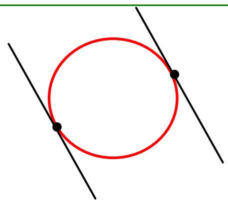
ricerca delle equazioni delle rette tangenti alla circonferenza

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0,y_0)$ **esterno** alla circonferenza	
$y-y_0=m(x-x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0,y_0)$
$y=y_0+m(x-x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$\dfrac{\lvert m(\alpha-x_0)-\beta+y_0\rvert}{\sqrt{m^2+1}}=r$	• si utilizza la formula della distanza di un punto da una retta in forma esplicita • si impone che la distanza tra il centro $C(\alpha;\beta)$ della circonferenza e il fascio di rette sia uguale ad r
$\dfrac{[m(\alpha-x_0)-\beta+y_0]^2}{m^2+1}=r^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri • si calcola il minimo comune multiplo • si sviluppano i calcoli
$y-y_0=m_1(x-x_0)$ $y-y_0=m_2(x-x_0)$	• si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ottenendo i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti
Le equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0,y_0)$ esterno alla circonferenza si possono ottenere anche utilizzando il procedimento illustrato per le altre coniche	

equazione della retta tangente in un punto $P_0(x_0,y_0)$ **della** circonferenza: formula di sdoppiamento		
$x^2+y^2+ax+by+c=0$		• si scrive l'equazione della circonferenza • si pone $\boldsymbol{x^2=x_0x}$ e $\boldsymbol{y^2=y_0y}$ • si pone $\boldsymbol{x}=\frac{x_0+x}{2}$ e $\boldsymbol{y}=\frac{y_0+y}{2}$
$x_0\cdot x+y_0\cdot y+a\dfrac{x_0+x}{2}+b\dfrac{y_0+y}{2}+c=0$		• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione della circonferenza • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0,y_0)$

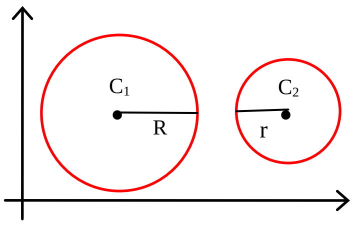
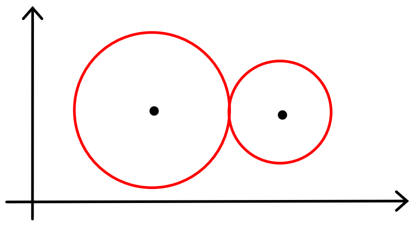
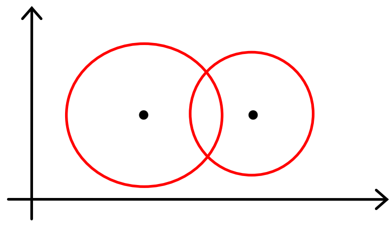
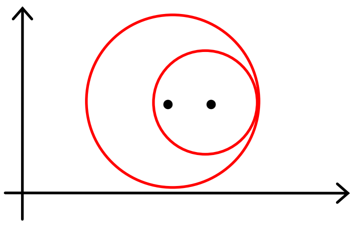
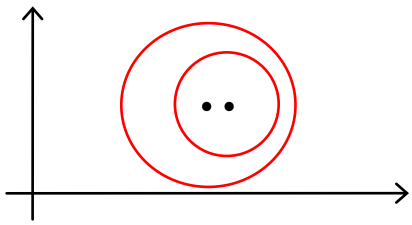
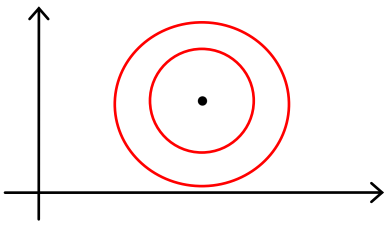
Circonferenza

equazione delle rette tangenti parallele ad una retta data

$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con $\boldsymbol{m}$ assegnato
$x^2 + (mx + q)^2 + ax + b(mx + q) + c = 0$	• si sostituisce la y nell'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ • si sviluppano i calcoli, ordinando l'equazione rispetto alla x
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$ 	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta e circonferenza) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni della rette tangenti

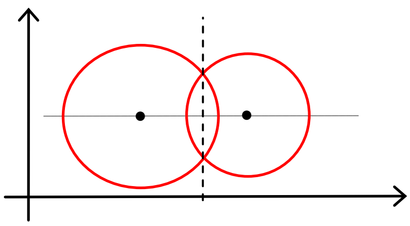
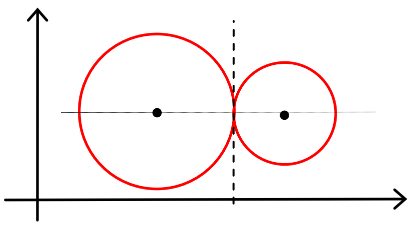
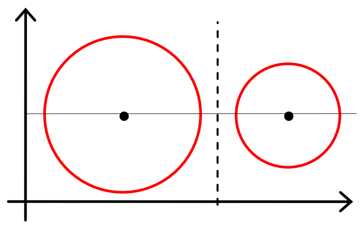
in alcuni problemi il coefficiente angolare $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o la perpendicolare alla retta tangente

posizioni reciproche di due circonferenze

		
$C_1C_2 > R + r$ circonferenze esterne	$C_1C_2 = R + r$ circonferenze tangenti esterne	$R - r < C_1C_2 < R + r$ circonferenze secanti
		
$C_1C_2 = R - r$ circonferenze tangenti interne	$C_1C_2 < R - r$ circonferenze interne	$C_1C_2 = 0$ circonferenze concentriche

asse radicale di due circonferenze

L'asse radicale di due circonferenze non concentriche è la retta del piano, luogo geometrico dei punti aventi la stessa **potenza** rispetto ai centri delle due circonferenze

osservazioni

l'asse radicale è sempre ortogonale al segmento $\overline{C_1C_2}$ che unisce i centri delle due circonferenze. Inoltre:

- se le due circonferenze sono **secanti**, l'asse radicale è alla retta passante per i due punti di intersezione
- se le circonferenze sono **tangenti,** l'asse radicale è la retta tangente alle due circonferenze nel punto comune

l'asse radicale consente di trovare gli eventuali punti di intersezione tra due circonferenze mettendo a sistema l'equazione dell'asse stesso con l'equazione di una delle due circonferenze

