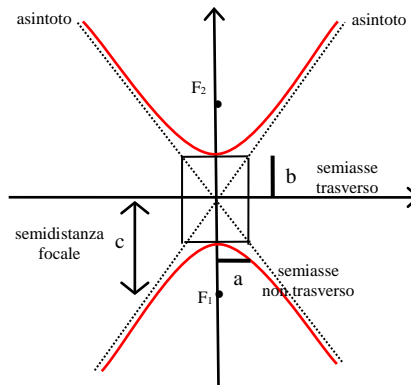
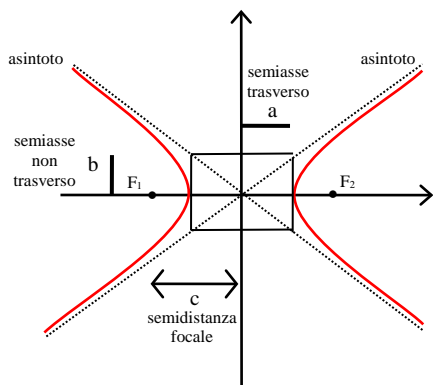


Iperbole

definizione

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante, cioè: $|PF_1 - PF_2| = \text{costante}$



iperbole con i fuochi sull'asse delle x

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

iperbole con i fuochi sull'asse delle y

$$|PF_1 + PF_2| = 2b$$

equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

lunghezza asse trasverso, lunghezza asse non trasverso e distanza focale

$2a$

$2b$

$2c$

$2b$

$2a$

$2c$

relazione tra i parametri a, b, c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

coordinate dei fuochi

$$F_1(-c; 0)$$

$$F_2(c; 0)$$

$$F_1(0; -c)$$

$$F_2(0; c)$$

equazioni degli asintoti

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

eccentricità

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e > 1$$

$$e = \frac{c}{b}$$

$$e > 1$$

ricerca dell'equazione di una iperbole

equazione dell'iperbole noti i fuochi ed il semiasse trasverso

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

- si applica la definizione di iperbole ricordando che la costante è uguale a $2a$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

- si calcolano le due distanze PF_1 e PF_2

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2$$


- si elevano al quadrato entrambi i membri

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

- si sviluppano i calcoli e si isola il radicale rimasto
- si elevano di nuovo al quadrato entrambi i membri
- si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole in forma non canonica

Iperbole

equazione dell'iperbole passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> nell'equazione dell'iperbole in forma canonica si effettua la sostituzione $\frac{1}{a^2} = \alpha$ e $\frac{1}{b^2} = \beta$
$\alpha x_1^2 - \beta y_1^2 = 1$ $\alpha x_2^2 - \beta y_2^2 = 1$	<p><i>passaggio per A</i></p> <p><i>passaggio per B</i></p> <ul style="list-style-type: none"> si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente
$\begin{cases} \alpha x_1^2 - \beta y_1^2 = 1 \\ \alpha x_2^2 - \beta y_2^2 = 1 \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> si risolve il sistema di primo grado nelle incognite α e β
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta

in generale	
per trovare l'equazione di una iperbole è necessario:	
<ul style="list-style-type: none"> avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente) trasformare ogni condizione in una equazione ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 e b^2 risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 e b^2 sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'iperbole, ottenendo l'equazione cercata 	
	<p>nota che nella ricerca dell'equazione dell'iperbole:</p> <ul style="list-style-type: none"> le incognite sono a^2 e b^2 e non a e b conviene imporre le condizioni date a partire dall'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'iperbole

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno all'iperbole	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> si ricava la y dell'equazione del fascio
$b^2x^2 - a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ dell'iperbole : <u>formula di sdoppiamento</u>	
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> si scrive l'equazione dell'iperbole in forma non canonica si pone $x^2 = x_0 \cdot x$ e $y^2 = y_0 \cdot y$
$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'iperbole sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

Iperbole

equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare m assegnato	
$y = mx + q$	<ul style="list-style-type: none"> si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con m assegnato
$b^2x^2 - a^2[mx + q]^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	<ul style="list-style-type: none"> si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q ricavando i valori di q_1 e q_2 si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti



in alcuni problemi m si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente

iperbole traslata		
l'iperbole si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y		
	$O(\alpha, \beta)$	coordinate del centro dell'iperbole
	$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$	equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x riferita al sistema XOY

ricerca dell'equazione dell'iperbole traslata note le coordinate del centro $O(\alpha, \beta)$	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<ul style="list-style-type: none"> data l'equazione dell'iperbole in forma canonica
$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$	<ul style="list-style-type: none"> si sostituisce a $x \rightarrow x - \alpha$ e a $y \rightarrow y - \beta$ (traslazione di centro $O(\alpha, \beta)$) si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole traslata

Iperbole

iperbole equilatera

l'iperbole si dice equilatera se i semiassi sono uguali: $a = b$

	$x^2 - y^2 = a^2$	equazione
	$c = a\sqrt{2}$	relazione tra a, c
	$F_1(-c; 0) \quad F_2(c; 0)$	coordinate dei fuochi
	$y = -x \quad y = x$	equazioni asintoti
	$e = \frac{c}{a} \quad e > 1$	eccentricità



osserva che nell'iperbole equilatera gli asintoti coincidono con le bisettrici del I e III e del II e IV quadrante

iperbole equilatera ruotata di $\pm 45^\circ$

	$xy = k$	equazione per $k > 0$
	$F_1(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$	coordinate del primo fuoco
	$F_2(\sqrt{2k}; \sqrt{2k})$	coordinate del secondo fuoco

	$xy = k$	equazione per $k < 0$
	$F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k})$	coordinate del primo fuoco
	$F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$	coordinate del secondo fuoco

funzione omografica

si dice funzione omografica l'iperbole equilatera ruotata di 45° e traslata rispetto all'origine degli assi cartesiani

	$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \begin{matrix} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{matrix}$	equazione
	$O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$	coordinate del centro dell'iperbole O'
	$x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$	equazioni degli asintoti