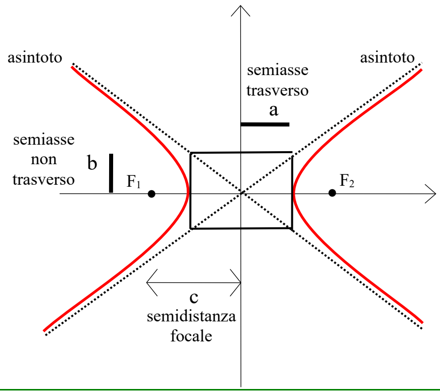
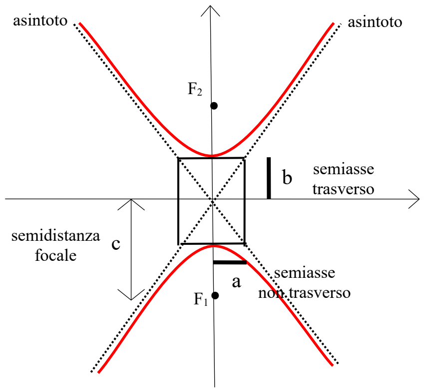
Iperbole

definizione

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante, cioè: $|PF_1 - PF_2| = costante$





iperbole con i fuochi sull'asse delle x	iperbole con i fuochi sull'asse delle y
$\|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\| = 2a$	$\|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\| = 2b$

equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$	$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

lunghezza asse trasverso, lunghezza asse non trasverso e distanza focale

$2a$	$2b$	$2c$	$2b$	$2a$	$2c$

relazione tra i parametri a, b, c

$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$

coordinate dei fuochi

$F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0; -c)$ $F_2(0\,; c)$

equazioni degli asintoti

$y = -\frac{b}{a}x$ $y = \frac{b}{a}x$	$y = -\frac{b}{a}x$ $y = \frac{b}{a}x$

eccentricità

$e = \frac{c}{a}$ $e > 1$	$e = \frac{c}{b}$ $e > 1$

ricerca dell'equazione di una iperbole

equazione dell'iperbole noti i fuochi ed il semiasse trasverso

$\|PF_1 - PF_2\| = 2a$	• si applica la definizione di iperbole ricordando che la costante è uguale a $2a$
$\left\|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right\| = 2a$	• si calcolano le due distanze PF_1 e PF_2
$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$	• si elevano al quadrato entrambi i membri
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	• si sviluppano i calcoli e si isola il radicale rimasto • si elevano di nuovo al quadrato entrambi i membri • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole in forma non canonica

Iperbole

equazione dell'iperbole passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	• nell'equazione dell'iperbole in forma canonica si effettua la sostituzione $\frac{1}{a^2} = \boldsymbol{\alpha}$ e $\frac{1}{b^2} = \boldsymbol{\beta}$
$\alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1$ *passaggio per A* $\alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1$ *passaggio per B*	• si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente
$\begin{cases} \alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1 \\ \alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1 \end{cases}$	• si risolve il sistema di primo grado nelle incognite α e β
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	• si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta

in generale

per trovare l'equazione di una iperbole è necessario:

- avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 e b^2
- risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 e b^2
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'iperbole, ottenendo l'equazione cercata

nota che nella ricerca dell'equazione dell'iperbole:

- le incognite sono a^2 e b^2 **e non** a e b
- conviene imporre le condizioni date a partire dall'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'iperbole

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ **esterno** all'iperbole	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	• si ricava la y dell'equazione del fascio
$b^2x^2 - a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita m ricavando i valori m_1 ed m_2 • si sostituiscono m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ **dell**'iperbole: formula di sdoppiamento	
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	• si scrive l'equazione dell'iperbole in forma non canonica • si pone $\boldsymbol{x^2 = x_0 \cdot x}$ e $\boldsymbol{y^2 = y_0 \cdot y}$
$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$	• si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'iperbole • sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$

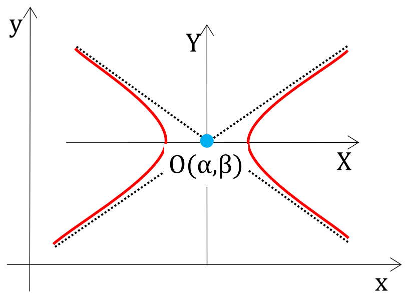
Iperbole

equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare **m** assegnato	
$y = \boldsymbol{m}x + q$	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con **m** assegnato
$b^2x^2 - a^2[mx+q]^2 = a^2b^2$	• si sostituisce la y nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	• si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla x • si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole) • si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita q ricavando i valori di q_1 e q_2 • si sostituiscono q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

in alcuni problemi $\boldsymbol{m}$ si ricava nota la retta parallela o perpendicolare alla retta tangente

iperbole traslata

l'iperbole si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y



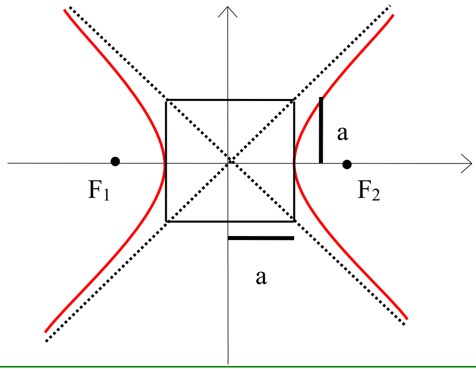
$\boldsymbol{O(\alpha,\beta)}$	coordinate del centro dell'iperbole
$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x riferita al sistema XOY

ricerca dell'equazione dell'iperbole traslata note le coordinate del centro $O(\alpha,\beta)$	
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	• data l'equazione dell'iperbole in forma canonica
$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	• si sostituisce a $\boldsymbol{x \to x - \alpha}$ e a $\boldsymbol{y \to y - \beta}$ (traslazione di centro $O(\alpha,\beta)$) • si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole traslata

Iperbole

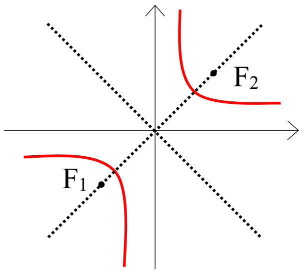
iperbole equilatera

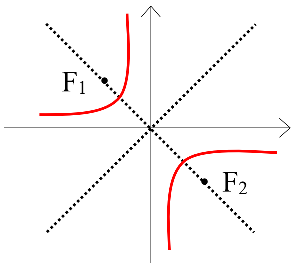
l'iperbole si dice equilatera se i semiassi sono uguali: $a = b$

	$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$	equazione
	$c = a\sqrt{2}$	relazione tra a, c
	$F_1(-c;\ 0)$ $\qquad F_2(c;\ 0)$	coordinate dei fuochi
	$y = -x$ $\qquad y = x$	equazioni asintoti
	$e = \frac{c}{a}$ $\qquad e > 1$	eccentricità

osserva che nell'iperbole equilatera gli asintoti coincidono con le bisettrici del I e III e del II e IV quadrante

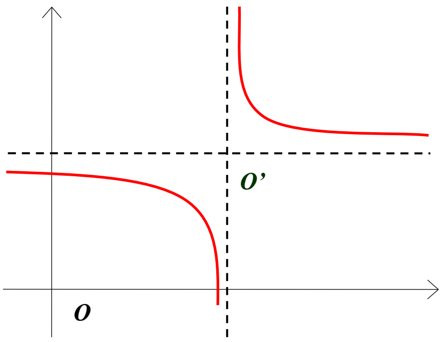
iperbole equilatera ruotata di $\pm 45°$

	$\boldsymbol{xy = k}$	equazione per $\boldsymbol{k} > 0$
	$F_1(-\sqrt{2k}\,; -\sqrt{2k})$	coordinata del primo fuoco
	$F_2(\ \sqrt{2k}\,;\ \ \sqrt{2k})$	coordinata del secondo fuoco

	$\boldsymbol{xy = k}$	equazione per $\boldsymbol{k} < 0$
	$F_1(-\sqrt{-2k}\,; \sqrt{-2k})$	coordinata del primo fuoco
	$F_2(\sqrt{-2k}\,; -\sqrt{-2k})$	coordinata del secondo fuoco

funzione omografica

si dice funzione omografica l'iperbole equilatera ruotata di 45° e traslata rispetto all'origine degli assi cartesiani

	$\boldsymbol{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$ $\quad c \neq 0 \quad ad - bc \neq 0$	equazione
	$O'\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$	coordinate del centro dell'iperbole O'
	$x = -\frac{d}{c}$ $\qquad y = \frac{a}{c}$	equazioni degli asintoti