

Divisione di due polinomi

premessa

Assegnati un polinomio dividendo $P(x)$ di grado n e un polinomio divisore $S(x)$ di grado m con $n \geq m$, dividere $P(x)$ per $S(x)$ vuol dire trovare il polinomio quoziente $Q(x)$, di grado $n - m$, e il polinomio resto $R(x)$, di grado minore di m oppure di grado nullo, per i quali risulta:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

cioè: $\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \cdot \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$

Il polinomio quoziente e il polinomio resto sono unici.

Se $R(x) = 0$ il polinomio $P(x)$ si dice *divisibile* per il polinomio $S(x)$ e la divisione si dice *esatta*

Vediamo in dettaglio, con i seguenti esempi, come si trovano i polinomi quoziente e resto

esempi

1.	Eseguiamo la seguente divisione:	$(x - 3x^2 + 3x^5 + 5) : (1 + x^2 - x)$
	$(3x^5 - 3x^2 + x + 5) : (x^2 - x + 1)$	si ordinano, se necessario, i polinomi secondo le potenze decrescenti della x
	$(3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5)$	si completano, se necessario, i polinomi dividendo e divisore con gli eventuali termini mancanti
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ \hline & \end{array}$	si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ & \underline{3x^3} \\ \hline & \end{array}$	si divide il primo termine ($3x^5$) del polinomio dividendo per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $3x^3$ nello spazio in basso a destra
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3} \\ \hline & \end{array}$	si moltiplica il monomio trovato ($3x^3$) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno , a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3} \\ \hline 0 & 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{array}$	si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
	$\begin{array}{r l} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 & x^2 - x + 1 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 & \underline{3x^3 + 3x^2} \\ \hline & 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{array}$	si divide il primo termine ($3x^4$) del polinomio ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $3x^2$ nello spazio in basso a destra

Divisione di due polinomi

$ \begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ \hline - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \end{array} $	<p>si moltiplica il monomio trovato ($3x^2$) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto</p>
$ \begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -6x^2 + x + 5 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \end{array} $	<p>si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.</p> <p>Poiché il grado del resto parziale ottenuto è uguale a quello del polinomio divisore, si procede ulteriormente con la divisione</p>
$ \begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ \hline - 6x^2 + x + 5 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 6 \end{array} $	<p>si divide il primo termine ($-6x^2$) del polinomio ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato -6 nello spazio in basso a destra</p>
$ \begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ \hline - 6x^2 + x + 5 \\ + 6x^2 - 6x + 6 \\ \hline + x + 11 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 6 \end{array} $	<p>si moltiplica il monomio trovato (-6) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio ridotto</p>
$ \begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^5 + 3x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ -3x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ \hline - 6x^2 + x + 5 \\ + 6x^2 - 6x + 6 \\ \hline 0 \quad -5x + 11 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 6 \end{array} $	<p>si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto.</p> <p>Poiché il grado del resto ottenuto è inferiore a quello del polinomio divisore, la divisione finisce</p>

Per definizione di divisione si ha:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{QUOZIENTE} \cdot \text{DIVISORE} + \text{RESTO}$$

$$(3x^5 - 3x^2 + x + 5) = (3x^3 + 3x^2 - 6) \cdot (x^2 - x + 1) + (-5x + 11)$$

Divisione di due polinomi

2.	Eseguiamo la seguente divisione:	$(8x + 2x^3 - 7x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1)$
$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$		si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della x . Si completano, se necessario, i due polinomi
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline \end{array} \right. $		si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x \\ \hline \end{array} \right. $		si divide il primo termine ($2x^3$) del polinomio dividendo per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $2x$ nello spazio in basso a destra
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x \\ \hline \end{array} \right. $		si moltiplica il monomio trovato ($2x$) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline 0 \quad -3x^2 + 6x - 3 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x \\ \hline \end{array} \right. $		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x - 3 \\ \hline \end{array} \right. $		si divide il primo termine ($-3x^2$) del polinomio dividendo ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato -3 nello spazio in basso a destra
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \\ +3x^2 - 6x + 3 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x - 3 \\ \hline \end{array} \right. $		si moltiplica il monomio trovato (-3) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$ \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 \\ +3x^2 - 6x + 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \left \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x - 3 \\ \hline \end{array} \right. $		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Si osserva che, in questo caso, il polinomio resto è zero
Per definizione di divisione si ha:		
$\text{DIVIDENDO} = \text{QUOZIENTE} \cdot \text{DIVISORE}$		
$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$		

Divisione di due polinomi

3.	Eseguiamo la seguente divisione:	$(2x + 2x^3 - 3x^2 - 3) : (x^2 + 1)$
$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 0x + 1)$		si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della x . Si completano, se necessario, i due polinomi
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^2 + 0x + 1 \end{array}$		si crea la griglia in figura disponendo il polinomio dividendo a sinistra e il polinomio divisore a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ \hline x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si divide il primo termine ($2x^3$) del polinomio dividendo per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato $2x$ nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 2x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato ($2x$) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline 0 - 3x^2 + 0x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Tale operazione porta all'eliminazione del termine di grado massimo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 - 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si divide il primo termine ($-3x^2$) del polinomio dividendo ridotto per il primo termine (x^2) del polinomio divisore e si scrive il risultato -3 nello spazio in basso a destra
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 + 0x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \\ +3x^2 - 0x + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si moltiplica il monomio trovato (-3) per ciascun monomio del polinomio divisore e si scrive il risultato, cambiato di segno, a sinistra sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo
$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 \\ +3x^2 - 0x + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 3 \end{array}$		si sommano i termini simili e si riporta il risultato ottenuto. Si osserva che, in questo caso, il polinomio resto è zero
Per definizione di divisione si ha:		
$\text{DIVIDENDO} = \text{QUOZIENTE} \cdot \text{DIVISORE}$		
$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) = (2x - 3) \cdot (x^2 + 1)$		