Elementi di logica delle proposizioni

definizioni
Una **proposizione** (o **enunciato**) è una affermazione che può essere **Vera** o **Falsa** • "Parigi è la capitale della Francia" ; "Roma è la capitale della Francia" sono proposizioni **la prima è Vera, la seconda è Falsa** • "Il colore giallo non mi piace" ; " Londra è la città più bella del mondo" **non** sono proposizioni
Una **tautologia** è una proposizione **sempre Vera** • "Ora sono le nove **o** non sono le nove" è una tautologia perché è una proposizione sempre Vera
Una **contraddizione** è una proposizione **sempre Falsa** • "Ora sono le nove **e** non sono le nove" è una contraddizione perché è una proposizione sempre Falsa
Un **paradosso** è una proposizione che, **se si suppone Vera risulta Falsa** e se si suppone Falsa risulta Vera • "Questa frase è falsa" è un paradosso perchè se supponiamo la frase Vera allora risulta Falsa Viceversa se supponiamo la frase Falsa allora risulta Vera

principi	
Principio del terzo escluso	se una proposizione è Vera allora la sua negazione è Falsa e non esiste una terza possibilità
Principio di non contraddizione	una proposizione non può essere contemporaneamente Vera e Falsa

operatori logici e tavole di verità

proposizioni		non	e	o	xor	implicazione	doppia implicazione
p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	**V**	F	V	V	F	V	V
V	**F**	F	F	V	V	F	F
F	**V**	V	F	V	V	V	F
F	**F**	V	F	F	F	V	V

proprietà e leggi	
$p \wedge p = p$ $p \vee p = p$	proprietà di idempotenza
$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	proprietà commutativa
$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	proprietà associativa
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	proprietà distributiva
$p \wedge (p \vee q) = q$ $p \vee (p \wedge q) = p$	proprietà di assorbimento
$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$	1ª legge di De Morgan: "non (p e q) è uguale a non p o non q"
$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$	2ª legge di De Morgan: "non (p o q) è uguale a non p e non q"

Elementi di logica delle proposizioni

esempi sulle tavole di verità

- Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica $\overline{\boldsymbol{p \wedge q}}$

p	q	$p \wedge q$	$\overline{\boldsymbol{p \wedge q}}$
V	V	V	**F**
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

1. si costruisce la tavola di verità delle proposizioni p e q considerandone tutte le possibili combinazioni di vero V e falso F (1ª e 2ª colonna)
2. si applica l'operatore **e** ($\wedge$) alle proposizioni p e q e si costruisce la tavola di verità (3ª colonna)
3. si applica l'operatore **non** ($\overline{}$) alla proposizione composta $p \wedge q$ e si costruisce la tavola di verità (4ª colonna)

- Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica $\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$

p	q	$\overline{p}$	$\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

1. si costruisce la tavola di verità delle proposizioni p e q considerandone tutte le possibili combinazioni di vero V e falso F (1ª e 2ª colonna)
2. si costruisce la tavola di verità della proposizione $\overline{p}$ (3ª colonna)
3. si applica l'operatore **o** ($\vee$) alle proposizioni $\overline{p}$ e q e si costruisce la tavola di verità dell'espressione logica $\overline{p} \vee q$ (4ª colonna)

- Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica $\boldsymbol{(p \rightarrow q) \wedge p}$

p	q	$p \rightarrow q$	$\boldsymbol{(p \rightarrow q) \wedge p}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

1. si costruisce la tavola di verità delle proposizioni p e q considerandone tutte le possibili combinazioni di V ed F (1ª e 2ª colonna)
2. si applica l'operatore **implicazione** ($\rightarrow$) alle proposizioni p e q e si costruisce la tavola di verità di $p \rightarrow q$ (3ª colonna)
3. si applica l'operatore **e** ($\wedge$) alle proposizioni $p \rightarrow q$ e q e si costruisce la tavola di verità (4ª colonna)

- Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica $\boldsymbol{(p \vee \overline{q}) \rightarrow \overline{p \wedge q}}$

p	q	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\boldsymbol{(p \vee \overline{q}) \rightarrow \overline{p \wedge q}}$
V	V	F	V	V	F	**F**
V	F	V	V	F	V	**V**
F	V	F	F	F	V	**V**
F	F	V	V	F	V	**V**

- Costruiamo la tavola di verità dell'espressione logica $\boldsymbol{(\overline{p} \dot{\vee} q) \leftrightarrow p \wedge \overline{q}}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \dot{\vee} q$	$p \wedge \overline{q}$	$\boldsymbol{(\overline{p} \dot{\vee} q) \leftrightarrow p \wedge \overline{q}}$
V	V	F	F	V	F	**F**
V	F	F	V	F	V	**F**
F	V	V	F	F	F	**V**
F	F	V	V	V	F	**F**

Elementi di logica delle proposizioni

esempi di passaggio dal linguaggio naturale alle espressioni logiche

Individua le proposizioni delle seguenti espressioni ed esprimi l'espressione sotto forma di operatori logici

Data l'espressione: " **mangio una mela o una pera** "
Le proposizioni sono: $\boldsymbol{p}$ = " mangio una mela " $\boldsymbol{q}$ = " mangio una pera "
L'espressione logica si scrive: $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Data l'espressione: " **se oggi esce il sole allora vado al mare** "
Le proposizioni sono: $\boldsymbol{p}$ = " oggi esce il sole " $\boldsymbol{q}$ = " vado al mare "
L'espressione logica si scrive: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$

Data l'espressione: " **non è vero che questo argomento è semplice ed interessante** "
Le proposizioni sono: $\boldsymbol{p}$ = " questo argomento è semplice " $\boldsymbol{q}$ = " questo argomento è interessante "
L'espressione logica si scrive: $\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}}$

Data l'espressione: " **se il professore ti ha valutato con 4 vuol dire che non hai studiato. Se avessi studiato e non fossi uscito con gli amici avresti avuto un bel voto. O studi o esci con gli amici** "
Le proposizioni sono: $\boldsymbol{p}$ = " il professore ti valuta con 4" $\boldsymbol{q}$ = " studiare "
$\boldsymbol{r}$ = " uscire con gli amici" $\boldsymbol{s}$ = " avere un bel voto "
L'espressione logica si scrive: $\boldsymbol{p} \rightarrow \overline{\boldsymbol{q}} \;\wedge\; (\boldsymbol{q} \wedge \overline{\boldsymbol{r}}) \rightarrow \boldsymbol{s} \;\wedge\; \boldsymbol{q} \dot{\vee} \boldsymbol{r}$

approfondimenti ed esempi sulle proprietà e leggi della logica

legge della doppia negazione

Data l'espressione: " non è vero che Giulio non ha dormito "
la proposizione che la compone è: p = " Giulio ha dormito "
l'equivalente espressione logica è: $\overline{\overline{\boldsymbol{p}}}$

regola della contrapposizione

La legge si enuncia: p implica q è equivalente a (non q) implica (non p)
In simboli: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} = \overline{\boldsymbol{q}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{p}}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	$\boldsymbol{\overline{q} \rightarrow \overline{p}}$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

1. si costruisce la tavola di verità per ciascuna proposizione e per ciascun operatore che agisce sulle proposizioni
2. si confrontano le tavole di verità delle espressioni logiche $p \rightarrow q$ e $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ (5ª e 6ª colonna)
3. poiché coincidono allora l'uguaglianza è verificata

Esempio: "Se piove allora esco con l'ombrello " equivale a " Se non esco con l'ombrello allora non piove "
perché identificate le proposizioni p = " piove " e q = " esco con l'ombrello "
si ha $\overline{p}$ = " **non** piove " e $\overline{q}$ = "**non** esco con l'ombrello "
da cui $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ = " se non esco con l'ombrello allora non piove "

Elementi di logica delle proposizioni

1ª legge di De Morgan

La legge si enuncia: non (p **e** q) è uguale a (non p) **o** (non q)

In simboli: $\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{p}} \vee \overline{\boldsymbol{q}}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}}$	$\overline{\boldsymbol{p}} \vee \overline{\boldsymbol{q}}$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F	**V**	**V**
F	F	V	V	F	**V**	**V**

1. si costruisce la tavola di verità per ciascuna proposizione e per ciascun operatore applicato alle proposizioni
2. si confrontano le tavole di verità delle espressioni logiche $\overline{p \wedge q}$ e $\overline{p} \vee \overline{q}$ (6ª e 7ª colonna)
3. se coincidono allora l'uguaglianza è verificata

Esempio: " non è vero che Lia ama le viole **e** le rose " equivale a " Lia non ama le viole **o** non ama le rose "

perché identificate le proposizioni $p =$ " Lia ama le viole " e $q =$ " Lia ama le rose "

si ha $\overline{p} =$ " Lia **non** ama le viole " e $\overline{q} =$ " Lia **non** ama le rose "

da cui $\overline{p} \vee \overline{q} =$ " Lia ama le viole **o** non ama le rose "

2ª legge di De Morgan

La legge si enuncia: non (p **o** q) è uguale a (non p) **e** (non q)

In simboli: $\overline{\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}}$	$\overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	V	**F**	**F**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	F	**V**	**V**

1. si costruisce la tavola di verità per ciascuna proposizione e per ciascun operatore che agisce sulle proposizioni
2. si confrontano le tavole di verità delle espressioni logiche $\overline{p \vee q}$ e $\overline{p} \wedge \overline{q}$ (6ª e 7ª colonna)
3. se coincidono allora l'uguaglianza è verificata

Esempio: " non è vero che domani piove **o** nevica" equivale a " domani non piove **e** non nevica "

perché identificate le proposizioni $p =$ " domani piove " e $q =$ " domani nevica "

si ha $\overline{p} =$ " domani **non** piove " e $\overline{q} =$ " domani **non** nevica "

da cui $\overline{p} \vee \overline{q} =$ " domani non piove **e** non nevica "

esempi di paradossi famosi

Un paradosso è una proposizione che, se si suppone Vera risulta Falsa e se si suppone Falsa risulta Vera.

Riportiamo due dei paradossi più famosi della logica.

Paradosso del mentitore o di Epimenide: " Tutti i Cretesi sono bugiardi. Io sono Cretese "

Paradosso (o antinomia) di Russell: " In un villaggio vi è un solo barbiere che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso? "