

Introduzione alla logica dei predicati

premessa

La logica dei predicati studia la verità delle proposizioni, le operazioni sulle proposizioni, le proprietà di un dato soggetto della proposizione e le sue relazioni con altri soggetti della proposizione.

Le proprietà di un dato soggetto e le loro relazioni con altri soggetti della proposizione si chiamano **quantificatori**.

Quantificatore Universale

Il quantificatore universale esprime che una data proprietà dell'insieme **appartiene a tutti** gli elementi dell'insieme.

Nel linguaggio naturale corrisponde alle particelle “tutti”, “ogni”, “qualunque sia”, “chi”, “chiunque”...

In simboli il quantificatore universale si indica con la scrittura \forall e si legge “per ogni”

esempi

- “**Tutti** i numeri pari sono divisibili per 2”
- “**Ogni** mammifero allatta i suoi cuccioli”
- “**Chi** si accontenta gode”

ma anche

- “Gli uomini sono mortali” intendendo “(Tutti) gli uomini sono mortali”
- “I giovani amano la musica” intendendo “(Tutti) i giovani amano la musica”

Quantificatore Esistenziale

Il quantificatore esistenziale esprime che una data proprietà dell'insieme **appartiene solo ad alcuni** elementi dell'insieme.

Nel linguaggio naturale corrisponde alle particelle “esiste almeno uno”, “qualche”, “alcuni”, ...

In simboli il quantificatore esistenziale si indica con la scrittura \exists e si legge “esiste almeno uno” oppure “esiste”

esempi

- “**Esiste almeno un** numero intero che sia minore di 3”
- “**Qualche** mammifero vive in mare”
- “**Alcune** mele sono mature”

queste sono proposizioni che esprimono che la proprietà “minore di 3”, “vivere in mare”, “essere maturo” appartiene solo ad una parte degli elementi dell'insieme “numeri”, “mammiferi”, “mele”

negazione del quantificatore universale

Il quantificatore universale \forall si nega:

- antepoendo il NON alle particelle “tutti”, “ogni”, “qualunque sia”, “chi”, “chiunque”
- oppure, in modo equivalente, sostituendo il quantificatore universale con il quantificatore esistenziale “esiste almeno uno” e negando la proprietà

Introduzione alla logica dei predicati

esempio

- Negare la proposizione “*Tutti* gli uomini sono mortali “ significa affermare che “*Non tutti* gli uomini sono mortali ” oppure “*Esiste almeno un* uomo che *non* è mortale”

negazione del quantificatore esistenziale

Il quantificatore esistenziale \exists si nega:

- antepoendo il NON E' VERO CHE alle particelle “esiste almeno uno”, “qualche”, “alcuni”
- oppure, in modo equivalente, sostituendo il quantificatore esistenziale con il quantificatore universale “tutti” e negando la proprietà

esempio

- Negare la proposizione “*Esiste almeno una* mela che *non* è matura ” significa affermare “*Non (è vero che)* esiste almeno una mela che non è matura” oppure “*Tutte* le mele sono mature”

espressioni equivalenti con la negazione dei quantificatori

Per ottenere espressioni con i quantificatori che siano equivalenti tra loro bisogna nell'ordine:

1. negare il quantificatore
2. negare la proposizione

ad esempio per esprimere in maniera equivalente la proposizione “Tutti gli uomini sono mortali “ si sostituisce il quantificatore “tutti”: “**Esiste almeno un** uomo che è mortale”
 si nega la proprietà: “Esiste almeno un uomo che **non** è mortale”
 e si nega la proposizione: “**Non è vero che** esiste almeno un uomo che non è mortale”

Si hanno quattro tipologie di espressioni equivalenti. Vediamole nei seguenti esempi

espressione con il quantificatore universale	espressione equivalente
tutti sono biondi	non è vero che (esiste) qualcuno che NON è biondo
tutti non sono biondi	non è vero che qualcuno è biondo
Non tutti sono biondi	non è vero che tutti NON sono biondi oppure (esiste) qualcuno (che) NON è biondo
Non tutti non sono biondi	non è vero che tutti sono biondi oppure (esiste) qualcuno (che) è biondo

Introduzione alla logica dei predicati

espressione con il quantificatore esistenziale	espressione equivalente
qualcuno è basso	non è vero che tutti sono alti
qualcuno non è basso	non è vero che tutti sono bassi
non esiste qualcuno che è basso	tutti sono alti
non esiste qualcuno che è alto	tutti sono bassi



osserva che nel linguaggio naturale si preferisce negare una proprietà utilizzando un termine contrario. Per questo motivo negli esempi precedenti all'espressione "non basso" si è preferito il termine "alto"

altri esempi

Data l'espressione: **"Tutti i numeri pari sono divisibili per 2"**

- la sua negazione è "Esiste almeno un numero pari che non è divisibile per 2"
- la sua equivalente è "Non è vero che qualche numero pari non è divisibile per 2"

Data l'espressione: **"Non esiste una persona che non sia buona"**

- la sua negazione è "Non tutte le persone sono buone"
- la sua equivalente è "(tutte) le persone sono buone"

Data l'espressione: **"Ogni mammifero allatta i suoi cuccioli"**

- la sua negazione è "Qualche mammifero non allatta i suoi cuccioli"
- la sua equivalente è "Non è vero che esiste qualche mammifero che non allatta i suoi cuccioli"

Data l'espressione: **"Alcune mele sono mature"**

- la sua negazione è "Tutte le mele non sono mature"
- la sua equivalente è "Non è vero che tutte mele non sono mature"

Data l'espressione: **"Qualche amico non è andato al pub"**

- la sua negazione è "Tutti gli amici sono andati al pub"
- la sua equivalente è "Non è vero che tutti gli amici sono andati al pub"



osserva che l'espressione equivalente alla data si ottiene per negazione dell'espressione negata. E' questa la proprietà logica, facilmente verificabile con la tabella di verità, per cui **due negazioni affermano**