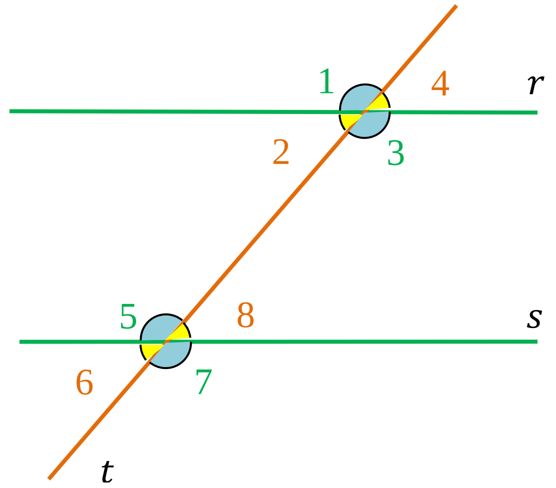
Criterio di parallelismo

enunciato

Se due rette tagliate da una trasversale formano:

- angoli alterni interni o alterni esterni congruenti
- angoli corrispondenti congruenti
- angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari

allora le rette sono parallele



Hp: $2 \cong 8$ o $3 \cong 5$ o $1 \cong 7$ o $4 \cong 6$

$1 \cong 5$ o $2 \cong 6$ o $3 \cong 7$ o $4 \cong 8$

$2 + 5 \cong 180°$ o $3 + 8 \cong 180°$

$1 + 6 \cong 180°$ o $4 + 7 \cong 180°$

Th: $r \parallel s$

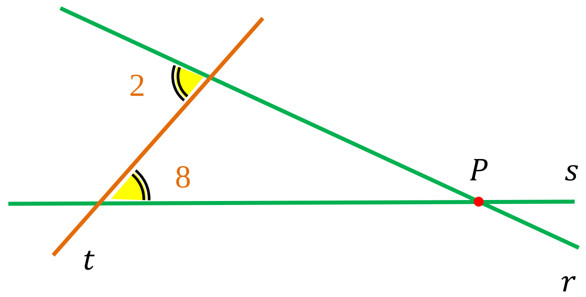
dimostrazione

il criterio si dimostra per assurdo

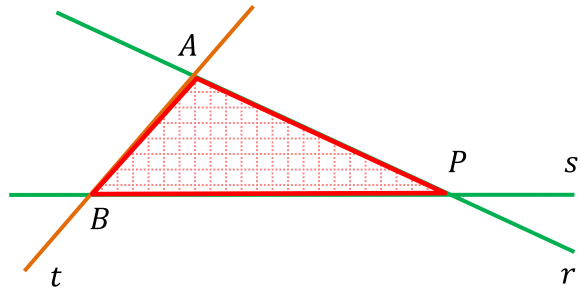
Assumiamo per ipotesi che la coppia di angoli alterni interni 2 e 8 sono congruenti.

Supponiamo per assurdo che le rette r ed s non sono parallele.

Allora esse si incontreranno in un punto P.

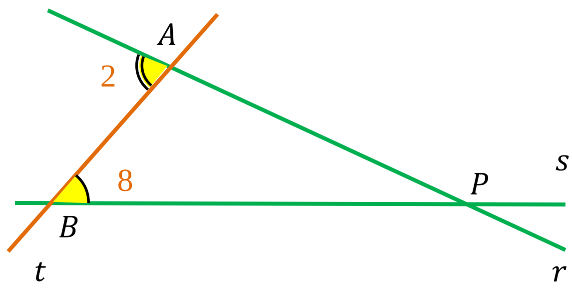


Consideriamo il triangolo ABP.



Per il primo teorema dell'angolo esterno, risulta che l'angolo esterno 2 è maggiore di ciascuno degli angoli interni al triangolo ABP non adiacenti ad esso. In particolare $2 > 8$.

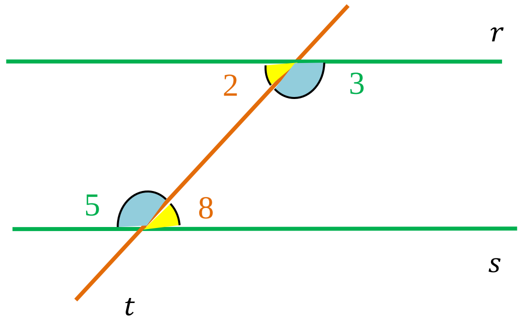
Ciò è assurdo, perché nega l'ipotesi che gli angoli 2 ed 8 sono congruenti, quindi le rette r ed s sono parallele.



Criterio di parallelismo

Assumiamo per ipotesi che la coppia di angoli alterni interni 3 e 5 sono congruenti.

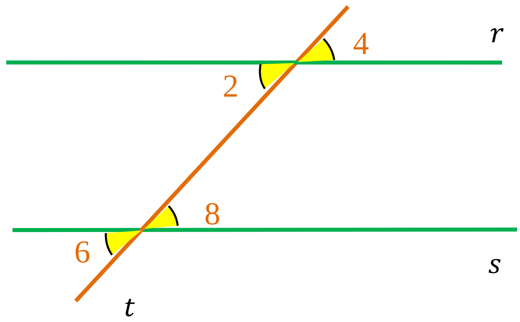
Gli angoli 2 e 8 sono congruenti perché sono supplementari rispettivamente degli angoli congruenti 3 e 5, quindi, per la dimostrazione precedente, le rette r ed s risultano parallele.



Assumiamo per ipotesi che la coppia di angoli alterni esterni 4 e 6 sono congruenti.

Allora lo saranno anche gli angoli 2 e 8 perché opposti al vertice rispettivamente di 4 e 6. Poiché 2 e 8 sono alterni interni congruenti, si ricade nella primo caso e quindi le rette r ed s risultano parallele.

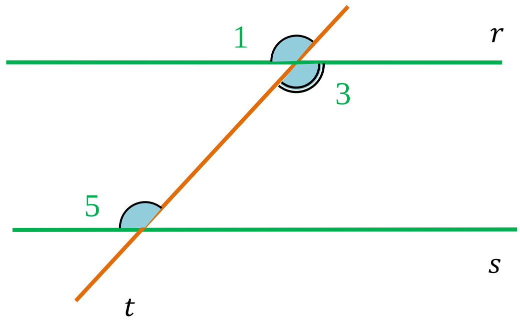
In maniera analoga si dimostra il caso di congruenza degli angoli alterni esterni 1 e 7.



Assumiamo per ipotesi che gli angoli corrispondenti 1 e 5 sono congruenti.

Poiché l'angolo 1 è congruente all'angolo 3 (perché opposti al vertice) si ricade nella dimostrazione con ipotesi di congruenza degli angoli alterni interni 3 e 5 e quindi le rette r ed s risultano parallele.

Analogamente si dimostra il caso delle altre coppie di angoli corrispondenti congruenti.

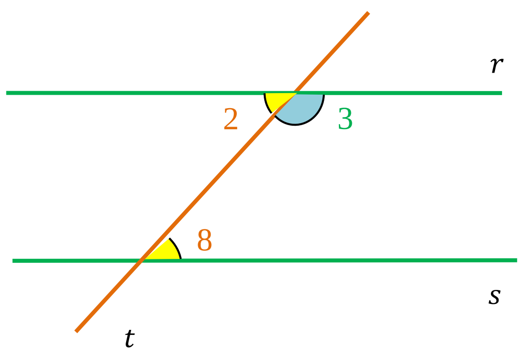


Assumiamo ora per ipotesi che gli angoli coniugati interni 3 e 8 sono supplementari, cioè che $3 + 8 \cong 180°$.

Osserviamo che l'angolo 2 è adiacente all'angolo 3 e quindi suo supplementare, cioè $2 + 3 \cong 180°$.

Per ipotesi anche $3 + 8 \cong 180°$, quindi gli angoli 2 e 8 sono congruenti tra loro perché supplementari dello stesso angolo 3.

Le rette r ed s saranno dunque parallele per la dimostrazione con ipotesi di congruenza degli angoli alterni interni 2 e 8.



Il caso degli angoli coniugati interni supplementari 2 e 5 e degli angoli coniugati esterni supplementari 4 e 7 o 1 e 6 si dimostra in maniera analoga.