

Numeri Complessi

numeri immaginari

- si chiama **unità immaginaria** e si indica con ***i*** la radice quadrata di -1 : $i = \sqrt{-1}$
- un **numero immaginario** si ottiene dalla radice quadrata di un numero negativo

ad esempio:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-20} = \sqrt{20 \cdot (-1)} = 2\sqrt{5}i$$

- le **potenze di *i*** si ripetono di 4 in 4 infatti:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -\sqrt{-1} = -i$$


$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = \sqrt{-1}$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -\sqrt{-1} = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

 in generale $i^n = i^r$ con r resto della divisione di n per 4. Ad esempio: $i^{27} = i^3$ perchè $27:4 = 6$ con resto $r = 3$

numeri complessi (forma algebrica)

- un **numero complesso *z*** è la somma di un numero reale e di un numero immaginario: $z = a + ib$

Esempio: $z = 2 + 3i$ $z = 3 - 5i$ $z = -2 + 7i$ $z = \sqrt{2} + \sqrt{7}i$

- due numeri complessi si dicono **coniugati** se hanno la stessa parte reale e la parte immaginaria opposta.

Esempio: $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 2 - 3i$ sono numeri complessi coniugati

operazioni tra numeri complessi

Dati due numeri complessi $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 5 - 4i$

Somma: si sommano le parti reali e le parti immaginarie

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i$$

Prodotto: si effettuano i prodotti tra i due binomi ricordando che $i^2 = -1$


$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (5 - 4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 15 - 2i + 8 = 23 - 2i$$

Rapporto: si moltiplica e si divide il rapporto dei due numeri per il complesso coniugato del denominatore

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{5 - 4i} \cdot \frac{5 + 4i}{5 + 4i} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$$

Potenza: si effettua la potenza del binomio

$$(z_1)^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

 Per la **potenza**: se l'esponente è maggiore di 3 conviene usare la formula di De Moivre (vedi scheda di approfondimento)

esempio

risolviamo la seguente equazione di secondo grado a **coefficienti reali** nel campo complesso:

$$x^2 - 4x + 20 = 0 \rightarrow x = 2 \mp \sqrt{4 - 20} \rightarrow x = 2 \mp \sqrt{-16} \rightarrow x = 2 \mp 4i$$