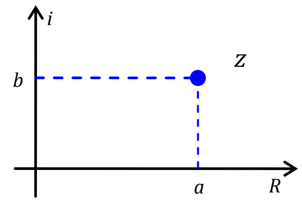
Numeri complessi: approfondimento

rappresentazione nel piano complesso (piano di Gauss) di un numero complesso z

forma algebrica

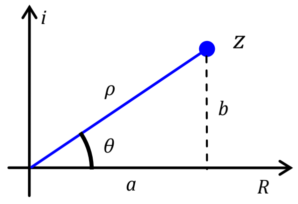


$$\boldsymbol{z = a + ib}$$

$\boldsymbol{a}$ = parte reale

$\boldsymbol{b}$ = parte immaginaria

forma trigonometrica



$$\boldsymbol{z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)}$$

$\boldsymbol{\rho =}$ modulo

$\boldsymbol{\theta =}$ anomalia

passaggio dalla forma algebrica a quella trigonometrica

$$\boldsymbol{z} = a + ib = \rho cos\theta + i\ \rho sen\theta = \boldsymbol{\rho(cos\theta + i\ sen\theta)}$$

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ per il teorema di Pitagora
- $tg\theta = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \ \theta = arctg\ \frac{b}{a}$ per le relazioni di trigonometria dei triangoli rettangoli si ha:

per determinare l'angolo $\boldsymbol{\theta}$ è necessario tenere conto dei segni di a e b per individuare il quadrante in cui si trova il punto $\boldsymbol{z}$ e di conseguenza l'angolo θ (vedi i seguenti esempi)

$$\boldsymbol{z} = 1 + i\sqrt{3} \quad a = 1\ e\ b = \sqrt{3} \rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2\ ; \quad tg\theta = \sqrt{3}\ \ cioè\ \ \vartheta = \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \boldsymbol{z} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{z} = -1 - i\sqrt{3} \quad a = 1\ \ e\ b = \ -\sqrt{3} \rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2\ ; \quad tg\theta = \sqrt{3}\ \ cioè\ \ \vartheta = \frac{4}{3}\pi \ \rightarrow \boldsymbol{z} = 2\left(cos\frac{4}{3}\pi + i\ sen\frac{4}{3}\pi\right)$$

per passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica basta calcolare i valori del seno e coseno e sviluppare i calcoli

potenza n-sima di un numero complesso in forma trigonometrica (formula di De Moivre)

$$z = \rho(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) \ \ \rightarrow \ \ z^n = \rho^n(cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$$

Esempio: $\boldsymbol{z} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\frac{\pi}{3}\right)\ elevato\ alla\ quinta \rightarrow\ z^5 = 2^5\left(cos\frac{5}{3}\pi + i\ sen\ \frac{5}{3}\pi\right) = 32\ \left(\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 - i\ 16\sqrt{3}$

radice n-sima di un numero complesso in forma trigonometrica

$$z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta) \ \ \rightarrow \ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

con k = 0,1,2,…,n-1

Esempio: $\mathbf{z} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\frac{\pi}{3}\right) \ \rightarrow \ \sqrt{\mathbf{z}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\ sen\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$ con k = 0 e k = 1 cioè:

$$k = 0 \ \rightarrow \ \mathbf{z_1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \ \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 1 \ \rightarrow \ \mathbf{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2} + i\ sen\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\ sen\frac{7}{6}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \ \frac{1}{2}i\right) = \ -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

nel campo complesso la radice n-sima di un numero ha sempre n soluzioni, ciò implica che non si può effettuare la semplificazione tra l'indice della radice e l'esponente del radicando, cioè: $\sqrt[6]{z^4} \neq \sqrt[3]{z^2}$ altrimenti si perdono soluzioni

forma esponenziale di un numero complesso

la forma esponenziale di un numero complesso z è: $\boldsymbol{z = \rho e^{i\theta}}$

si ottiene applicando alla forma trigonometrica $z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)$ la formula di Eulero $e^{i\theta} = (cos\theta + i\ sen\theta)$

© 2013 - www.matematika.it