

Tema di: MATEMATICA 1998

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti quesiti e li risolva:

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^3 + 3x + b,$$

dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.

a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti.

b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa

$$-2\sqrt{2}.$$

c) Controllato che la curva γ si ottiene per

$$a = -\frac{1}{2},$$

disegnarne l'andamento.

d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva C' di equazione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$).

b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B.

c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' secca C' .

d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B.

e) Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C'' .

3. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a

$$\frac{4}{5}.$$

a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t .

b) Verificato che risulta:

$$V(x) = \frac{1}{2} \pi a^3 (4 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{cos} x),$$

con x appartenente ad un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.

d) Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R ed r ed altezza h è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$